

Строки

Борис Золотов (Б09, Б11)
Михаил Иванов (Б07, Б08)
Иван Казменко (Б01, Б05)
Владислав Макаров (Б02, Б03)
Мария Радионова (Б06)
Арина Филимонова (Б10)

Санкт-Петербургский Государственный Университет
Факультет математики и компьютерных наук

Среда, 17 декабря 2025 года

Содержание

- 1 Введение
 - Определения
 - Задача
 - Наивное решение
 - Наивный алгоритм: код
- 2 Хеширование строк
 - Идея
 - Полиномиальный хеш
 - Хеши подстрок одинаковой длины
 - Алгоритм Рабина–Карпа: код
 - Анализ
 - Выбор констант
 - Хеши произвольных подстрок
- 3 Префикс-функция
 - Идея
 - Префикс-функция
 - Пример
 - Поиск подстроки
 - Алгоритм Кнута–Морриса–Пратта: код
 - Анализ
- 4 Z-функция
 - Идея
 - Z-функция
 - Пример
 - Поиск подстроки
 - Алгоритм Гасфилда: код
 - Анализ
- 5 Задачи
 - Генератор строки
 - Период строки
- 6 Палиндромы
 - Задача
 - Идея
 - Радиусы палиндромов
 - Пример
 - Алгоритм Манакера: код
 - Анализ

Содержание

- 1 Введение
 - Определения
 - Задача
 - Наивное решение
 - Наивный алгоритм: код
- 2 Хеширование строк
 - Идея
 - Полиномиальный хеш
 - Хеши подстрок одинаковой длины
 - Алгоритм Рабина–Карпа: код
 - Анализ
 - Выбор констант
 - Хеши произвольных подстрок
- 3 Префикс-функция
 - Идея
 - Префикс-функция
 - Пример
 - Поиск подстроки
 - Алгоритм Кнута–Морриса–Пратта: код
 - Анализ
- 4 Z-функция
 - Идея
 - Z-функция
 - Пример
 - Поиск подстроки
 - Алгоритм Гасфилда: код
 - Анализ
- 5 Задачи
 - Генератор строки
 - Период строки
- 6 Палиндромы
 - Задача
 - Идея
 - Радиусы палиндромов
 - Пример
 - Алгоритм Манакера: код
 - Анализ

Определения

- *Подстрока* — это последовательность соседних символов строки.

Определения

- *Подстрока* — это последовательность соседних символов строки.
- Например, у строки «abcd» есть такие подстроки:
 - «» (пустая строка),
 - «abcd» (вся строка),
 - «abc»,
 - «ca».

Определения

- *Подстрока* — это последовательность соседних символов строки.
- Например, у строки «abcd» есть такие подстроки:
 - «» (пустая строка),
 - «abcd» (вся строка),
 - «abc»,
 - «ca».
- А следующие строки её подстроками не являются:
 - «e» (нет такой буквы),
 - «aa» (не соседние),
 - «bcd».

Определения

- *Подстрока* — это последовательность соседних символов строки.
- Например, у строки «abcd» есть такие подстроки:
 - «» (пустая строка),
 - «abcd» (вся строка),
 - «abc»,
 - «ca».
- А следующие строки её подстроками не являются:
 - «e» (нет такой буквы),
 - «aa» (не соседние),
 - «bcd».
- *Префикс* — это подстрока, начинающаяся в начале строки.
- *Суффикс* — подстрока, заканчивающаяся в конце строки.
- *Собственный префикс* или *суффикс* — это префикс или суффикс, не совпадающий с самой строкой.

Задача

Задача:

- Даны строка S и текст T .
- Содержится ли S в T как подстрока?

Задача

Задача:

- Даны строка S и текст T .
- Содержится ли S в T как подстрока?
- Варианты:
 - установить факт,
 - найти первое или любое вхождение,
 - найти все вхождения.

Задача

Задача:

- Даны строка S и текст T .
- Содержится ли S в T как подстрока?
- Варианты:
 - установить факт,
 - найти первое или любое вхождение,
 - найти все вхождения.
- Примеры:
 - $S = \text{«aba»}$, $T = \text{«ababa»}$ (2 вхождения).
 - $S = \text{«aba»}$, $T = \text{«aabba»}$ (0 вхождений).
 - $S = \text{«aba»}$, $T = \text{«abaababaababa»}$ (5 вхождений).

Наивное решение

Пусть $|S| = m$ и $|T| = n$. Наивное решение за $O(mn)$:

- Сравним $S_0S_1 \dots S_{m-1}$ и $T_0T_1 \dots T_{m-1}$.
- Сравним $S_0S_1 \dots S_{m-1}$ и $T_1T_2 \dots T_m$.
- Сравним $S_0S_1 \dots S_{m-1}$ и $T_2T_3 \dots T_{m+1}$.
- ...
- Сравним $S_0S_1 \dots S_{m-1}$ и $T_{n-m}T_{n-m+1} \dots T_{n-1}$.

Наивное решение

Пусть $|S| = m$ и $|T| = n$. Наивное решение за $O(mn)$:

- Сравним $S_0S_1 \dots S_{m-1}$ и $T_0T_1 \dots T_{m-1}$.
- Сравним $S_0S_1 \dots S_{m-1}$ и $T_1T_2 \dots T_m$.
- Сравним $S_0S_1 \dots S_{m-1}$ и $T_2T_3 \dots T_{m+1}$.
- ...
- Сравним $S_0S_1 \dots S_{m-1}$ и $T_{n-m}T_{n-m+1} \dots T_{n-1}$.

Пример 1:

- $T = \text{«ababa»}$
- $S = \text{«aba»}$
- $T_0T_1T_2 = \text{«aba»}$, нашли
- $T_1T_2T_3 = \text{«bab»}$
- $T_2T_3T_4 = \text{«aba»}$, нашли

Наивное решение

Пусть $|S| = m$ и $|T| = n$. Наивное решение за $O(mn)$:

- Сравним $S_0S_1 \dots S_{m-1}$ и $T_0T_1 \dots T_{m-1}$.
- Сравним $S_0S_1 \dots S_{m-1}$ и $T_1T_2 \dots T_m$.
- Сравним $S_0S_1 \dots S_{m-1}$ и $T_2T_3 \dots T_{m+1}$.
- ...
- Сравним $S_0S_1 \dots S_{m-1}$ и $T_{n-m}T_{n-m+1} \dots T_{n-1}$.

Пример 2:

- $T = \text{«}aa \dots abaa \dots a\text{»}$
- $S = \text{«}aa \dots aa\text{»}$
- $T_0T_1 \dots T_{m-1} = \text{«}aa \dots ab\text{»}$
- $T_1T_2 \dots T_m = \text{«}aa \dots ba\text{»}$
- ...
- $T_{m-1}T_m \dots T_{n-1} = \text{«}baa \dots a\text{»}$

Наивный алгоритм: код

```
1  vector <int> findNaive (string s, string t) {
2      vector <int> res;
3      int m = s.size (), n = t.size ();
4      for (int i = 0; i + m <= n; i++) {
5          bool found = true;
6          for (int j = 0; j < m; j++)
7              if (s[j] != t[i + j]) {
8                  found = false;
9                  break;
10             }
11         if (found)
12             res.push_back (i + 1);
13     }
14     return res;
15 }
```

ВВОД:

aba
ababaaba

ВЫВОД:

1 3 6

Наивный алгоритм: код

```
1  vector <int> findNaive (string s, string t) {
2      vector <int> res;
3      int m = s.size (), n = t.size ();
4      for (int i = 0; i + m <= n; i++) {
5          bool found = true;
6          for (int j = 0; j < m; j++)
7              if (s[j] != t[i + j]) {
8                  found = false;
9                  break;
10             }
11         if (found)
12             res.push_back (i + 1);
13     }
14     return res;
15 }
```

ВВОД:

abb

ababaaba

ВЫВОД:

none

Содержание

- 1 Введение
 - Определения
 - Задача
 - Наивное решение
 - Наивный алгоритм: код
- 2 Хеширование строк
 - Идея
 - Полиномиальный хеш
 - Хеши подстрок одинаковой длины
 - Алгоритм Рабина–Карпа: код
 - Анализ
 - Выбор констант
 - Хеши произвольных подстрок
- 3 Префикс-функция
 - Идея
 - Префикс-функция
 - Пример
 - Поиск подстроки
 - Алгоритм Кнута–Морриса–Пратта: код
 - Анализ
- 4 Z-функция
 - Идея
 - Z-функция
 - Пример
 - Поиск подстроки
 - Алгоритм Гасфилда: код
 - Анализ
- 5 Задачи
 - Генератор строки
 - Период строки
- 6 Палиндромы
 - Задача
 - Идея
 - Радиусы палиндромов
 - Пример
 - Алгоритм Манакера: код
 - Анализ

Идея

Идея:

- Сопоставим каждой возможной строке случайное число.
- Вместо того, чтобы сравнивать строки, сравним числа.

Идея

Идея:

- Сопоставим каждой возможной строке случайное число.
- Вместо того, чтобы сравнивать строки, сравним числа.
- Если числа не равны, строки точно не равны.

Идея

Идея:

- Сопоставим каждой возможной строке случайное число.
- Вместо того, чтобы сравнивать строки, сравним числа.
- Если числа не равны, строки точно не равны.
- Если числа равны, ..

Идея

Идея:

- Сопоставим каждой возможной строке случайное число.
- Вместо того, чтобы сравнивать строки, сравним числа.
- Если числа не равны, строки точно не равны.
- Если числа равны, ..

Числа сравниваются быстрее, чем строки, только если они небольшие.

- Пусть наши случайные числа — целые из $[0, p)$.

Идея

Идея:

- Сопоставим каждой возможной строке случайное число.
- Вместо того, чтобы сравнивать строки, сравним числа.
- Если числа не равны, строки точно не равны.
- Если числа равны, ..

Числа сравниваются быстрее, чем строки, только если они небольшие.

- Пусть наши случайные числа — целые из $[0, p)$.
- Если *строки* не равны — числа, тем не менее, могут оказаться равны с вероятностью $1/p$.

Полиномиальный хеш

Как выбирать случайные числа?

- Настоящие случайные числа сложно использовать.

Полиномиальный хеш

Как выбирать случайные числа?

- Настоящие случайные числа сложно использовать.
- Построим псевдослучайные: полиномиальный хеш.
- $h(S_0 S_1 \dots S_{k-1}) = (((S_0 \cdot x + S_1) \cdot x + \dots) \cdot x + S_{k-1}) \bmod p$

Полиномиальный хеш

Как выбирать случайные числа?

- Настоящие случайные числа сложно использовать.
- Построим псевдослучайные: полиномиальный хеш.
- $h(S_0 S_1 \dots S_{k-1}) = (((S_0 \cdot x + S_1) \cdot x + \dots) \cdot x + S_{k-1}) \bmod p$
- $h(S_0 S_1 \dots S_{k-1}) = (S_0 \cdot x^{k-1} + S_1 \cdot x^{k-2} + \dots + S_{k-1} \cdot x^0) \bmod p$

Хеши подстрок одинаковой длины

Как быстро получить хеши всех подстрок T длины $|S|$?

Хеши подстрок одинаковой длины

Как быстро получить хеши всех подстрок T длины $|S|$?

- $$h(T_0 T_1 \dots T_{m-1}) = (T_0 \cdot x^{m-1} + T_1 \cdot x^{m-2} + \dots + T_{m-1} \cdot x^0) \bmod p$$

Хеши подстрок одинаковой длины

Как быстро получить хеши всех подстрок T длины $|S|$?

- $h(T_0 T_1 \dots T_{m-1}) = (T_0 \cdot x^{m-1} + T_1 \cdot x^{m-2} + \dots + T_{m-1} \cdot x^0) \bmod p$
- $h(T_1 \dots T_{m-1} T_m) = (T_1 \cdot x^{m-1} + \dots + T_{m-1} \cdot x^1 + T_m \cdot x^0) \bmod p$

Хеши подстрок одинаковой длины

Как быстро получить хеши всех подстрок T длины $|S|$?

- $h(T_0 T_1 \dots T_{m-1}) = (T_0 \cdot x^{m-1} + T_1 \cdot x^{m-2} + \dots + T_{m-1} \cdot x^0) \bmod p$
- $h(T_1 \dots T_{m-1} T_m) = (T_1 \cdot x^{m-1} + \dots + T_{m-1} \cdot x^1 + T_m \cdot x^0) \bmod p$
- $h(T_{[1\dots m+1]}) = (h(T_{[0\dots m]}) \cdot x - T_0 \cdot x^m + T_m) \bmod p$

Хеши подстрок одинаковой длины

Как быстро получить хеши всех подстрок T длины $|S|$?

- $h(T_0 T_1 \dots T_{m-1}) = (T_0 \cdot x^{m-1} + T_1 \cdot x^{m-2} + \dots + T_{m-1} \cdot x^0) \bmod p$
- $h(T_1 \dots T_{m-1} T_m) = (T_1 \cdot x^{m-1} + \dots + T_{m-1} \cdot x^1 + T_m \cdot x^0) \bmod p$
- $h(T_{[1\dots m+1]}) = (h(T_{[0\dots m]}) \cdot x - T_0 \cdot x^m + T_m) \bmod p$
- В общем случае:
- $h(T_{[k+1\dots k+m+1]}) = (h(T_{[k\dots k+m]}) \cdot x - T_k \cdot x^m + T_{k+m}) \bmod p$
- Число $x^m \bmod p$ можно найти один раз заранее.
- Во всех языках, кроме Питона, нужно вычитать по модулю аккуратно!

Алгоритм Рабина–Карпа: код

```
1  int const x = 821, p = 999999937;
2
3  vector <int> findRabinKarp (string s, string t) {
4      vector <int> res;
5      int m = s.size (), n = t.size ();
6      int hs = 0, ht = 0, xm = 1;
7      for (int j = 0; j < m; j++) {
8          hs = (hs * 1LL * x + s[j]) % p;
9          xm = (xm * 1LL * x) % p;
10     }
11     for (int i = 0; i < n; i++) {
12         ht = (ht * 1LL * x + t[i]) % p;
13         if (i >= m) {
14             ht = (ht - t[i - m] * 1LL * xm) % p;
15             if (ht < 0) ht += p;
16         }
17         if (ht == hs)
18             res.push_back (i - m + 2);
19     }
20     return res;
21 }
```

ВВОД:

aba
ababaaba

ВЫВОД:

1 3 6

Алгоритм Рабина–Карпа: код

```
1  int const x = 821, p = 999999937;
2
3  vector <int> findRabinKarp (string s, string t) {
4      vector <int> res;
5      int m = s.size (), n = t.size ();
6      int hs = 0, ht = 0, xm = 1;
7      for (int j = 0; j < m; j++) {
8          hs = (hs * 1LL * x + s[j]) % p;
9          xm = (xm * 1LL * x) % p;
10     }
11     for (int i = 0; i < n; i++) {
12         ht = (ht * 1LL * x + t[i]) % p;
13         if (i >= m) {
14             ht = (ht - t[i - m] * 1LL * xm) % p;
15             if (ht < 0) ht += p;
16         }
17         if (ht == hs)
18             res.push_back (i - m + 2);
19     }
20     return res;
21 }
```

ВВОД:

abb

ababaaba

ВЫВОД:

none

Анализ

- Общее время работы:
- Вероятность ошибки:

Анализ

- Общее время работы: $O(m + n)$.
- Вероятность ошибки:

Анализ

- Общее время работы: $O(m + n)$.
- Вероятность ошибки: $1 - (1 - 1/p)^{n-m+1}$ в предположении, что полученные числа по-настоящему случайные — на самом деле это не так.
- Математическое ожидание количества ошибок в таком случае равно $(n - m + 1)/p$, можно использовать это (или даже n/p) как грубую оценку сверху для вероятности хотя бы одной ошибки.

Выбор констант

Как выбрать x и p ?

Выбор констант

Как выбрать x и p ?

- p должно быть как можно больше...
- ...но чтобы вычисления оставались быстрыми.
- x должно быть больше размера алфавита.
- x и p должны быть взаимно просты.
- p не должно быть степенью двойки.

Выбор констант

Как выбрать x и p ?

- p должно быть как можно больше...
- ...но чтобы вычисления оставались быстрыми.
- x должно быть больше размера алфавита.
- x и p должны быть взаимно просты.
- p не должно быть степенью двойки.

Что всё-таки можно сделать?

- Можно выбрать большое простое p и случайное x .
- Если вероятность ошибки всё ещё велика, можно считать несколько разных хешей с разными константами x и p .

Хеши произвольных подстрок

Как быстро получить хеш любой подстроки T ?

Хеши произвольных подстрок

Как быстро получить хеш любой подстроки T ?

- Заранее посчитаем хеши всех префиксов: $h_k = h(T_{[0\dots k]})$.

Хеши произвольных подстрок

Как быстро получить хеш любой подстроки T ?

- Заранее посчитаем хеши всех префиксов: $h_k = h(T_{[0...k]})$.
- Подстрока – это больший префикс, от которого отрезали меньший префикс.

Хеши произвольных подстрок

Как быстро получить хеш любой подстроки T ?

- Заранее посчитаем хеши всех префиксов: $h_k = h(T_{[0...k]})$.
- Подстрока – это больший префикс, от которого отрезали меньший префикс.
- Пример: как найти $h(T_{[2...5]})$?
- $h(T_{[2...5]}) = (T_2 \cdot x^2 + T_3 \cdot x^1 + T_4 \cdot x^0) \bmod p$.
- $h(T_{[0...5]}) = (T_0 \cdot x^4 + T_1 \cdot x^3 + T_2 \cdot x^2 + T_3 \cdot x^1 + T_4 \cdot x^0) \bmod p$.
- $h(T_{[0...2]}) = (T_0 \cdot x^1 + T_1 \cdot x^0) \bmod p$.
- $h(T_{[2...5]}) = (h_5 - h_2 \cdot x^3) \bmod p$.

Хеши произвольных подстрок

Как быстро получить хеш любой подстроки T ?

- Заранее посчитаем хеши всех префиксов: $h_k = h(T_{[0...k]})$.
- Подстрока — это больший префикс, от которого отрезали меньший префикс.
- Пример: как найти $h(T_{[2...5]})$?
- $h(T_{[2...5]}) = (T_2 \cdot x^2 + T_3 \cdot x^1 + T_4 \cdot x^0) \bmod p$.
- $h(T_{[0...5]}) = (T_0 \cdot x^4 + T_1 \cdot x^3 + T_2 \cdot x^2 + T_3 \cdot x^1 + T_4 \cdot x^0) \bmod p$.
- $h(T_{[0...2]}) = (T_0 \cdot x^1 + T_1 \cdot x^0) \bmod p$.
- $h(T_{[2...5]}) = (h_5 - h_2 \cdot x^3) \bmod p$.
- В общем случае:
- $h(T_{[a...b]}) = (h_b - h_a \cdot x^{b-a}) \bmod p$.
- Числа $x^i \bmod p$ можно найти один раз заранее.

Содержание

- 1 Введение
 - Определения
 - Задача
 - Наивное решение
 - Наивный алгоритм: код
- 2 Хеширование строк
 - Идея
 - Полиномиальный хеш
 - Хеши подстрок одинаковой длины
 - Алгоритм Рабина–Карпа: код
 - Анализ
 - Выбор констант
 - Хеши произвольных подстрок
- 3 Префикс-функция
 - Идея
 - Префикс-функция
 - Пример
 - Поиск подстроки
 - Алгоритм Кнута–Морриса–Пратта: код
 - Анализ
- 4 Z-функция
 - Идея
 - Z-функция
 - Пример
 - Поиск подстроки
 - Алгоритм Гасфилда: код
 - Анализ
- 5 Задачи
 - Генератор строки
 - Период строки
- 6 Палиндромы
 - Задача
 - Идея
 - Радиусы палиндромов
 - Пример
 - Алгоритм Манакера: код
 - Анализ

Идея

- Идея: ускорим наивное решение.
- Пусть мы ищем $S = \text{«аабаас»}$ в $T = \text{«аабаабаад»}$.
- Выяснили, что $\text{«аабаа»} = \text{«аабаа»}$, но $\text{«аабааб»} \neq \text{«аабаас»}$.

Идея

- Идея: ускорим наивное решение.
- Пусть мы ищем $S = \text{«аабаас»}$ в $T = \text{«аабаабаад»}$.
- Выяснили, что $\text{«аабаа»} = \text{«аабаа»}$, но $\text{«аабааб»} \neq \text{«аабаас»}$.
- Хочется, глядя только на найденное «аабаа» , сказать, что со второй или с третьей буквы вхождение «аабаас» начинаться не может, можно сразу перейти к четвёртой.
- Как это узнать?

Идея

- Идея: ускорим наивное решение.
- Пусть мы ищем $S = \text{«аабаас»}$ в $T = \text{«аабаабаад»}$.
- Выяснили, что $\text{«аабаа»} = \text{«аабаа»}$, но $\text{«аабааб»} \neq \text{«аабаас»}$.
- Хочется, глядя только на найденное «аабаа» , сказать, что со второй или с третьей буквы вхождение «аабаас» начинаться не может, можно сразу перейти к четвёртой.
- Как это узнать?
- Рассмотрим пока только строку S .
- Вычислим *префикс-функцию*: для каждой позиции i рассмотрим $S^{(i)} = S_0S_1 \dots S_{i-1}$, и найдём длину наибольшего собственного суффикса $S^{(i)}$, равного префиксу $S^{(i)}$.

Идея

- Идея: ускорим наивное решение.
- Пусть мы ищем $S = \text{«аабаас»}$ в $T = \text{«аабаабаад»}$.
- Выяснили, что $\text{«аабаа»} = \text{«аабаа»}$, но $\text{«аабааб»} \neq \text{«аабаас»}$.
- Хочется, глядя только на найденное «аабаа» , сказать, что со второй или с третьей буквы вхождение «аабаас» начинаться не может, можно сразу перейти к четвёртой.
- Как это узнать?
- Рассмотрим пока только строку S .
- Вычислим *префикс-функцию*: для каждой позиции i рассмотрим $S^{(i)} = S_0S_1 \dots S_{i-1}$, и найдём длину наибольшего собственного суффикса $S^{(i)}$, равного префиксу $S^{(i)}$.
- Пример 1:

S	=	а	а	b	а	а	b	а	а	с
p	=	0	1	0	1	2	3	4	5	0

Идея

- Идея: ускорим наивное решение.
- Пусть мы ищем $S = \text{«аабаас»}$ в $T = \text{«аабаабаад»}$.
- Выяснили, что $\text{«аабаа»} = \text{«аабаа»}$, но $\text{«аабааб»} \neq \text{«аабаас»}$.
- Хочется, глядя только на найденное «аабаа» , сказать, что со второй или с третьей буквы вхождение «аабаас» начинаться не может, можно сразу перейти к четвёртой.
- Как это узнать?
- Рассмотрим пока только строку S .
- Вычислим *префикс-функцию*: для каждой позиции i рассмотрим $S^{(i)} = S_0S_1 \dots S_{i-1}$, и найдём длину наибольшего собственного суффикса $S^{(i)}$, равного префиксу $S^{(i)}$.
- Пример 2:

S	=	a	b	a	c	a	b	a
p	=	0	0	1	0	1	2	3

Префикс-функция

- Вычисляем префикс-функцию p слева направо.
- Пусть мы находимся в позиции $i \in [0, n)$.

Префикс-функция

- Вычисляем префикс-функцию p слева направо.
- Пусть мы находимся в позиции $i \in [0, n)$.
- При $i = 0$ префикс-функция равна нулю.

Префикс-функция

- Вычисляем префикс-функцию p слева направо.
- Пусть мы находимся в позиции $i \in [0, n)$.
- При $i = 0$ префикс-функция равна нулю.
- При $i > 0$ мы знаем $k = p(i - 1)$.
- Это значит, что на предыдущей позиции $S_0 S_1 \dots S_{k-1} = S_{i-k} S_{i-k+1} \dots S_{i-1}$ — самый длинный суффикс, равный префиксу.

Префикс-функция

- Вычисляем префикс-функцию p слева направо.
- Пусть мы находимся в позиции $i \in [0, n)$.
- При $i = 0$ префикс-функция равна нулю.
- При $i > 0$ мы знаем $k = p(i - 1)$.
- Это значит, что на предыдущей позиции $S_0 S_1 \dots S_{k-1} = S_{i-k} S_{i-k+1} \dots S_{i-1}$ — самый длинный суффикс, равный префиксу.
- Если $S_k = S_i$, то $p(i) = k + 1$.
- Если $k = 0$, просто сравним S_0 и S_i .

Префикс-функция

- Вычисляем префикс-функцию p слева направо.
- Пусть мы находимся в позиции $i \in [0, n)$.
- При $i = 0$ префикс-функция равна нулю.
- При $i > 0$ мы знаем $k = p(i - 1)$.
- Это значит, что на предыдущей позиции $S_0 S_1 \dots S_{k-1} = S_{i-k} S_{i-k+1} \dots S_{i-1}$ — самый длинный суффикс, равный префиксу.
- Если $S_k = S_i$, то $p(i) = k + 1$.
- Если $k = 0$, просто сравним S_0 и S_i .
- Если же $S_k \neq S_i$, нужно рассмотреть следующий по длине суффикс в позиции $i - 1$, равный префиксу.
- Для этого достаточно сделать $k := p(k - 1)$.
- А если $k = 0$?

Префикс-функция

- Вычисляем префикс-функцию p слева направо.
- Пусть мы находимся в позиции $i \in [0, n)$.
- При $i = 0$ префикс-функция равна нулю.
- При $i > 0$ мы знаем $k = p(i - 1)$.
- Это значит, что на предыдущей позиции $S_0 S_1 \dots S_{k-1} = S_{i-k} S_{i-k+1} \dots S_{i-1}$ — самый длинный суффикс, равный префиксу.
- Если $S_k = S_i$, то $p(i) = k + 1$.
- Если $k = 0$, просто сравним S_0 и S_i .
- Если же $S_k \neq S_i$, нужно рассмотреть следующий по длине суффикс в позиции $i - 1$, равный префиксу.
- Для этого достаточно сделать $k := p(k - 1)$.
- А если $k = 0$? Тогда $p(i) = 0$.

Пример

Пример: $S = a b a b a b a a b a b a b b$
 $p = 0 0 1 2 3 4 5 1 2 3 4 5 6 0$

Поиск подстроки

- Как это помогает искать подстроку S в строке T ?

Поиск подстроки

- Как это помогает искать подстроку S в строке T ?
- Например, так: запишем $R = S\#T$.
- Найдём префикс-функцию строки R .
- Те позиции, где она равна $|S|$, это концы вхождений S в T .

Поиск подстроки

- Как это помогает искать подстроку S в строке T ?
- Например, так: запишем $R = S\#T$.
- Найдём префикс-функцию строки R .
- Те позиции, где она равна $|S|$, это концы вхождений S в T .
- Пример 1:

R	=	a	b	a	#	a	b	a	b	a
p	=	0	0	1	0	1	2	3	2	3

Поиск подстроки

- Как это помогает искать подстроку S в строке T ?
- Например, так: запишем $R = S\#T$.
- Найдём префикс-функцию строки R .
- Те позиции, где она равна $|S|$, это концы вхождений S в T .
- Пример 2:

R	=	a	a	b	#	a	a	a	b	a	b	a
p	=	0	1	0	0	1	2	2	3	1	0	1

Алгоритм Кнута–Морриса–Пратта: код

```
1  vector <int> findKnuthMorrisPratt (string s, string t) {
2      vector <int> res;
3      string r = s + "#" + t;
4      int m = s.size (), len = r.size ();
5      int k = 0;
6      vector <int> p (len);
7      p[0] = k;
8      for (int i = 1; i < len; i++) {
9          while (k > 0 && r[i] != r[k])
10             k = p[k - 1];
11             if (r[i] == r[k])
12                 k += 1;
13             if (k == m)
14                 res.push_back (i - m * 2 + 1);
15             p[i] = k;
16         }
17     return res;
18 }
```

ВВОД:

aba
ababaaba

ВЫВОД:

1 3 6

Алгоритм Кнута–Морриса–Пратта: код

```
1  vector <int> findKnuthMorrisPratt (string s, string t) {
2      vector <int> res;
3      string r = s + "#" + t;
4      int m = s.size (), len = r.size ();
5      int k = -1;
6      vector <int> p;
7      p.push_back (k);
8      for (int i = 0; i < len; i++) {
9          while (k >= 0 && r[i] != r[k])
10             k = p[k];
11
12             k += 1;
13             if (k == m)
14                 res.push_back (i - m * 2 + 1);
15             p.push_back (k);
16         }
17     return res;
18 }
```

ВВОД:

abb

ababaaba

ВЫВОД:

none

Анализ

- Общее время работы:

Анализ

- Общее время работы: $O(m + n)$.

Анализ

- Общее время работы: $O(m + n)$.
- Действительно, границы самого длинного суффикса с каждым действием движутся слева направо.

Содержание

- 1 Введение
 - Определения
 - Задача
 - Наивное решение
 - Наивный алгоритм: код
- 2 Хеширование строк
 - Идея
 - Полиномиальный хеш
 - Хеши подстрок одинаковой длины
 - Алгоритм Рабина–Карпа: код
 - Анализ
 - Выбор констант
 - Хеши произвольных подстрок
- 3 Префикс-функция
 - Идея
 - Префикс-функция
 - Пример
 - Поиск подстроки
 - Алгоритм Кнута–Морриса–Пратта: код
 - Анализ
- 4 Z-функция
 - Идея
 - Z-функция
 - Пример
 - Поиск подстроки
 - Алгоритм Гасфилда: код
 - Анализ
- 5 Задачи
 - Генератор строки
 - Период строки
- 6 Палиндромы
 - Задача
 - Идея
 - Радиусы палиндромов
 - Пример
 - Алгоритм Манакера: код
 - Анализ

Идея

- Идея: ускорим наивное решение.
- Пусть мы ищем $S = \text{«аабаас»}$ в $T = \text{«аабаабаад»}$.
- Выяснили, что $\text{«аабаа»} = \text{«аабаа»}$, но $\text{«аабааб»} \neq \text{«аабаас»}$.

Идея

- Идея: ускорим наивное решение.
- Пусть мы ищем $S = \text{«аабаас»}$ в $T = \text{«аабаабаад»}$.
- Выяснили, что $\text{«аабаа»} = \text{«аабаа»}$, но $\text{«аабааб»} \neq \text{«аабаас»}$.
- Хочется, глядя только на найденное «аабаа» , сказать, что со второй или с третьей буквы вхождение «аабаас» начинаться не может, можно сразу перейти к четвёртой.
- Как это узнать?

Идея

- Идея: ускорим наивное решение.
- Пусть мы ищем $S = \text{«аабаас»}$ в $T = \text{«аабаабаад»}$.
- Выяснили, что $\text{«аабаа»} = \text{«аабаа»}$, но $\text{«аабааб»} \neq \text{«аабаас»}$.
- Хочется, глядя только на найденное «аабаа» , сказать, что со второй или с третьей буквы вхождение «аабаас» начинаться не может, можно сразу перейти к четвёртой.
- Как это узнать?
- Рассмотрим пока только строку S .
- Для каждой позиции $i > 0$ вычислим z -функцию: длину наибольшего совпадения с префиксом, начиная с этой позиции.

Идея

- Идея: ускорим наивное решение.
- Пусть мы ищем $S = \text{«аабаас»}$ в $T = \text{«аабаабаад»}$.
- Выяснили, что $\text{«аабаа»} = \text{«аабаа»}$, но $\text{«аабааб»} \neq \text{«аабаас»}$.
- Хочется, глядя только на найденное «аабаа» , сказать, что со второй или с третьей буквы вхождение «аабаас» начинаться не может, можно сразу перейти к четвёртой.
- Как это узнать?
- Рассмотрим пока только строку S .
- Для каждой позиции $i > 0$ вычислим z -функцию: длину наибольшего совпадения с префиксом, начиная с этой позиции.
- Пример 1:

S	=	а	а	b	а	а	b	а	а	с
z	=	0	1	0	5	1	0	2	1	0

Идея

- Идея: ускорим наивное решение.
- Пусть мы ищем $S = \text{«аабаас»}$ в $T = \text{«аабаабаад»}$.
- Выяснили, что $\text{«аабаа»} = \text{«аабаа»}$, но $\text{«аабааб»} \neq \text{«аабаас»}$.
- Хочется, глядя только на найденное «аабаа» , сказать, что со второй или с третьей буквы вхождение «аабаас» начинаться не может, можно сразу перейти к четвёртой.
- Как это узнать?
- Рассмотрим пока только строку S .
- Для каждой позиции $i > 0$ вычислим z -функцию: длину наибольшего совпадения с префиксом, начиная с этой позиции.
- Пример 2:

S	=	а	б	а	с	а	б	а
z	=	0	0	1	0	3	0	1

Z-функция

- Вычисляем функцию z слева направо.
- Пусть мы находимся в позиции $i \in [0, n)$.

Z-функция

- Вычисляем функцию z слева направо.
- Пусть мы находимся в позиции $i \in [0, n)$.
- При $i = 0$ определим значение функции равным нулю.

Z-функция

- Вычисляем функцию z слева направо.
- Пусть мы находимся в позиции $i \in [0, n)$.
- При $i = 0$ определим значение функции равным нулю.
- Из найденных подстрок, совпадающих с префиксами, будем помнить ту, которая кончается как можно правее.
- Пусть это подстрока $S[l_0...h_i)$.

Z-функция

- Вычисляем функцию z слева направо.
- Пусть мы находимся в позиции $i \in [0, n)$.
- При $i = 0$ определим значение функции равным нулю.
- Из найденных подстрок, совпадающих с префиксами, будем помнить ту, которая кончается как можно правее.
- Пусть это подстрока $S[l_0...h_i)$.
- Если позиция i лежит в $[l_0...h_i)$, посмотрим на позицию $i - l_0$.
- Вся подстрока $S[i - l_0...h_i - l_0)$ такая же, как $S[i...h_i)$.
- Так что оценка снизу на $z(i)$ — это $\min(h_i - i, z(i - l_0))$.

Z-функция

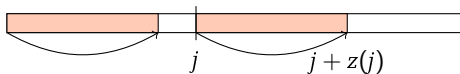
- Вычисляем функцию z слева направо.
- Пусть мы находимся в позиции $i \in [0, n)$.
- При $i = 0$ определим значение функции равным нулю.
- Из найденных подстрок, совпадающих с префиксами, будем помнить ту, которая кончается как можно правее.
- Пусть это подстрока $S[l_0...h_i)$.
- Если позиция i лежит в $[l_0...h_i)$, посмотрим на позицию $i - l_0$.
- Вся подстрока $S[i - l_0...h_i - l_0)$ такая же, как $S[i...h_i)$.
- Так что оценка снизу на $z(i)$ — это $\min(h_i - i, z(i - l_0))$.
- Теперь, пока буквы $S[z(i)]$ и $S[i + z(i)]$ совпадают, будем увеличивать $z(i)$.

Z-функция

- Вычисляем функцию z слева направо.
- Пусть мы находимся в позиции $i \in [0, n)$.
- При $i = 0$ определим значение функции равным нулю.
- Из найденных подстрок, совпадающих с префиксами, будем помнить ту, которая кончается как можно правее.
- Пусть это подстрока $S[l_0...h_i)$.
- Если позиция i лежит в $[l_0...h_i)$, посмотрим на позицию $i - l_0$.
- Вся подстрока $S[i - l_0...h_i - l_0)$ такая же, как $S[i...h_i)$.
- Так что оценка снизу на $z(i)$ — это $\min(h_i - i, z(i - l_0))$.
- Теперь, пока буквы $S[z(i)]$ и $S[i + z(i)]$ совпадают, будем увеличивать $z(i)$.
- Проверим, не оказался ли конец строки — это позиция $i + z(i)$ — правее h_i .

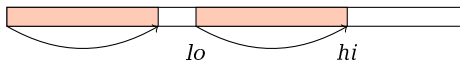
Пример

Пример: $S = a a b a a b a a a b a a b b$
 $z = 0 1 0 5 1 0 2 6 1 0 3 1 0 0$



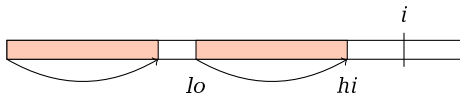
Пример

Пример: $S = a a b a a b a a a b a a b b$
 $z = 0 1 0 5 1 0 2 6 1 0 3 1 0 0$



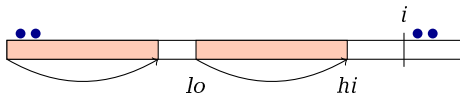
Пример

Пример: $S = a a b a a b a a a b a a b b$
 $z = 0 1 0 5 1 0 2 6 1 0 3 1 0 0$



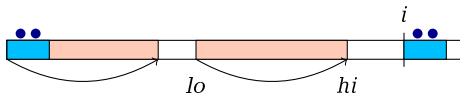
Пример

Пример: $S = a a b a a b a a a b a a b b$
 $z = 0 1 0 5 1 0 2 6 1 0 3 1 0 0$



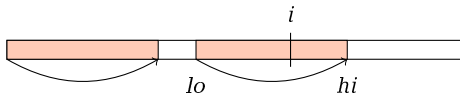
Пример

Пример: $S = a a b a a b a a a b a a b b$
 $z = 0 1 0 5 1 0 2 6 1 0 3 1 0 0$



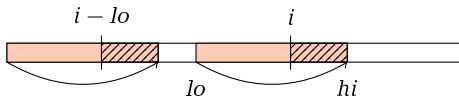
Пример

Пример: $S = a a b a a b a a a b a a b b$
 $z = 0 1 0 5 1 0 2 6 1 0 3 1 0 0$



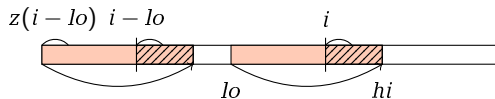
Пример

Пример: $S = a a b a a b a a a b a a b b$
 $z = 0 1 0 5 1 0 2 6 1 0 3 1 0 0$



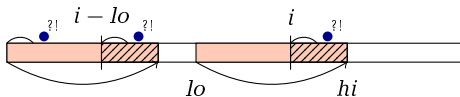
Пример

Пример: $S = a a b a a b a a a b a a b b$
 $z = 0 1 0 5 1 0 2 6 1 0 3 1 0 0$



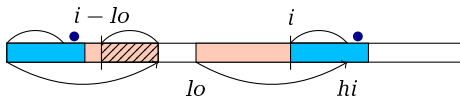
Пример

Пример: $S = a a b a a b a a a b a a b b$
 $z = 0 1 0 5 1 0 2 6 1 0 3 1 0 0$



Пример

Пример: $S = a a b a a b a a a b a a b b$
 $z = 0 1 0 5 1 0 2 6 1 0 3 1 0 0$



Поиск подстроки

- Как это помогает искать подстроку S в строке T ?

Поиск подстроки

- Как это помогает искать подстроку S в строке T ?
- Например, так: запишем $R = S\#T$.
- Найдём z -функцию строки R .
- Те позиции, где она равна $|S|$, это начала вхождений S в T .

Поиск подстроки

- Как это помогает искать подстроку S в строке T ?
- Например, так: запишем $R = S\#T$.
- Найдём z -функцию строки R .
- Те позиции, где она равна $|S|$, это начала вхождений S в T .
- Пример 1:

R	=	a	b	a	#	a	b	a	b	a
z	=	0	0	1	0	3	0	3	0	1

Поиск подстроки

- Как это помогает искать подстроку S в строке T ?
- Например, так: запишем $R = S\#T$.
- Найдём z -функцию строки R .
- Те позиции, где она равна $|S|$, это начала вхождений S в T .
- Пример 2:

R	=	a	a	b	#	a	a	a	b	a	b	a
z	=	0	1	0	0	2	3	1	0	1	0	1

Алгоритм Гасфилда: код

```
1  vector <int> findGusfield (string s, string t) {
2      vector <int> res;
3      string r = s + "#" + t;
4      int m = s.size (), len = r.size ();
5      vector <int> z (len);
6      z[0] = 0;
7      int lo = 0, hi = 0;
8      for (int i = 1; i < len; i++) {
9          if (i < hi)
10             z[i] = min (z[i - lo], hi - i);
11             while (i + z[i] < len && r[z[i]] == r[i + z[i]])
12                 z[i] += 1;
13             if (hi < i + z[i]) {
14                 lo = i;
15                 hi = i + z[i];
16             }
17             if (z[i] == m)
18                 res.push_back (i - m);
19         }
20     return res;
21 }
```

ВВОД:

aba
ababaaba

ВЫВОД:

1 3 6

Алгоритм Гасфилда: код

```
1  vector <int> findGusfield (string s, string t) {
2      vector <int> res;
3      string r = s + "#" + t;
4      int m = s.size (), len = r.size ();
5      vector <int> z (len);
6      z[0] = 0;
7      int lo = 0, hi = 0;
8      for (int i = 1; i < len; i++) {
9          if (i < hi)
10             z[i] = min (z[i - lo], hi - i);
11             while (i + z[i] < len && r[z[i]] == r[i + z[i]])
12                 z[i] += 1;
13             if (hi < i + z[i]) {
14                 lo = i;
15                 hi = i + z[i];
16             }
17             if (z[i] == m)
18                 res.push_back (i - m);
19         }
20     return res;
21 }
```

ВВОД:

abb

ababaaba

ВЫВОД:

none

Анализ

- Общее время работы:

Анализ

- Общее время работы: $O(m + n)$.

Анализ

- Общее время работы: $O(m + n)$.
- Действительно, при росте совпадения число hi тоже растёт.

Содержание

- 1 Введение
 - Определения
 - Задача
 - Наивное решение
 - Наивный алгоритм: код
- 2 Хеширование строк
 - Идея
 - Полиномиальный хеш
 - Хеши подстрок одинаковой длины
 - Алгоритм Рабина–Карпа: код
 - Анализ
 - Выбор констант
 - Хеши произвольных подстрок
- 3 Префикс-функция
 - Идея
 - Префикс-функция
 - Пример
 - Поиск подстроки
 - Алгоритм Кнута–Морриса–Пратта: код
 - Анализ
- 4 Z-функция
 - Идея
 - Z-функция
 - Пример
 - Поиск подстроки
 - Алгоритм Гасфилда: код
 - Анализ
- 5 Задачи
 - Генератор строки
 - Период строки
- 6 Палиндромы
 - Задача
 - Идея
 - Радиусы палиндромов
 - Пример
 - Алгоритм Манакера: код
 - Анализ

Генератор строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её генератор: кратчайшую строку G , для которой S является префиксом бесконечной строки $G^* = GGGGG\dots$

Генератор строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её генератор: кратчайшую строку G , для которой S является префиксом бесконечной строки $G^* = GGGGG\dots$
- Пример 1: $S = \text{«ababab»}$, $G = \text{«ab»}$.

Генератор строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её генератор: кратчайшую строку G , для которой S является префиксом бесконечной строки $G^* = GGGGG\dots$
- Пример 2: $S = \text{«хуз»}$, $G = \text{«хуз»}$.

Генератор строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её генератор: кратчайшую строку G , для которой S является префиксом бесконечной строки $G^* = GGGGG\dots$
- Пример 3: $S = \text{«abcabca»}$, $G = \text{«abc»}$.

Генератор строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её генератор: кратчайшую строку G , для которой S является префиксом бесконечной строки $G^* = GGGGG\dots$
- Пример 4: $S = \text{«abaabaab»}$, $G = \text{«aba»}$.

Генератор строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её генератор: кратчайшую строку G , для которой S является префиксом бесконечной строки $G^* = GGGGG\dots$
- Пример 1: $S = \text{«ababab»}$, $G = \text{«ab»}$.
- Префикс-функция и z -функция:

$$\begin{array}{rcccccc} S & = & a & b & a & b & a & b \\ p & = & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ z & = & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

Генератор строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её генератор: кратчайшую строку G , для которой S является префиксом бесконечной строки $G^* = GGGGG\dots$
- Пример 2: $S = \text{«хуз»}$, $G = \text{«хуз»}$.
- Префикс-функция и z -функция:

$$\begin{array}{rcl} S & = & \text{x} \quad \text{y} \quad \text{z} \\ p & = & 0 \quad 0 \quad 0 \\ z & = & 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Генератор строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её генератор: кратчайшую строку G , для которой S является префиксом бесконечной строки $G^* = GGGGG\dots$
- Пример 3: $S = \text{«abcabca»}$, $G = \text{«abc»}$.
- Префикс-функция и z -функция:

$S = a \ b \ c \ a \ b \ c \ a$

$p = 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4$

$z = 0 \ 0 \ 0 \ 4 \ 0 \ 0 \ 1$

Генератор строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её генератор: кратчайшую строку G , для которой S является префиксом бесконечной строки $G^* = GGGGG\dots$
- Пример 4: $S = \text{«abaabaab»}$, $G = \text{«aba»}$.
- Префикс-функция и z -функция:

S	=	a	b	a	a	b	a	a	b
p	=	0	0	1	1	2	3	4	5
z	=	0	0	1	5	0	1	2	0

Генератор строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её генератор: кратчайшую строку G , для которой S является префиксом бесконечной строки $G^* = GGGGG\dots$
- Ответ: $|S| - p_{last}$.
- Ответ: $\min i : i + z_i = |S|$, или $i = n$, если такого нет.

Генератор строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её генератор: кратчайшую строку G , для которой S является префиксом бесконечной строки $G^* = GGGGG\dots$
- Пример 1: $S = \text{«ababab»}$, $G = \text{«ab»}$.
- Префикс-функция и z -функция:

S	=	a	b	a	b	a	b
p	=	0	0	1	2	3	4
z	=	0	0	4	0	2	0
- Ответ: $|S| - p_{last}$.
- Ответ: $\min i : i + z_i = |S|$, или $i = n$, если такого нет.

Генератор строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её генератор: кратчайшую строку G , для которой S является префиксом бесконечной строки $G^* = GGGGG\dots$
- Пример 2: $S = \text{«xyz»}$, $G = \text{«xyz»}$.
- Префикс-функция и z -функция:

S	$=$	x	y	z
p	$=$	0	0	0
z	$=$	0	0	0
- Ответ: $|S| - p_{last}$.
- Ответ: $\min i : i + z_i = |S|$, или $i = n$, если такого нет.

Генератор строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её генератор: кратчайшую строку G , для которой S является префиксом бесконечной строки $G^* = GGGGG\dots$
- Пример 3: $S = \text{«abcabca»}$, $G = \text{«abc»}$.
- Префикс-функция и z -функция:

S	=	a	b	c	a	b	c	a
p	=	0	0	0	1	2	3	4
z	=	0	0	0	4	0	0	1
- Ответ: $|S| - p_{last}$.
- Ответ: $\min i : i + z_i = |S|$, или $i = n$, если такого нет.

Генератор строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её генератор: кратчайшую строку G , для которой S является префиксом бесконечной строки $G^* = GGGGG\dots$
- Пример 4: $S = \text{«abaabaab»}$, $G = \text{«aba»}$.
- Префикс-функция и z -функция:

S	=	a	b	a	a	b	a	a	b
p	=	0	0	1	1	2	3	4	5
z	=	0	0	1	5	0	1	2	0
- Ответ: $|S| - p_{last}$.
- Ответ: $\min i : i + z_i = |S|$, или $i = n$, если такого нет.

Период строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её период: кратчайшую строку G , для которой S является конкатенацией нескольких копий G .

Период строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её период: кратчайшую строку G , для которой S является конкатенацией нескольких копий G .
- Пример 1: $S = \text{«ababab»}$, $G = \text{«ab»}$.

Период строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её период: кратчайшую строку G , для которой S является конкатенацией нескольких копий G .
- Пример 2: $S = \text{«хуз»}$, $G = \text{«хуз»}$.

Период строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её период: кратчайшую строку G , для которой S является конкатенацией нескольких копий G .
- Пример 3: $S = \text{«abcabca»}$, $G = \text{«abcabca»}$.

Период строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её период: кратчайшую строку G , для которой S является конкатенацией нескольких копий G .
- Пример 4: $S = \text{«аааааа»}$, $G = \text{«а»}$.

Период строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её период: кратчайшую строку G , для которой S является конкатенацией нескольких копий G .
- Пример 1: $S = \text{«ababab»}$, $G = \text{«ab»}$.
- Префикс-функция и z -функция:

S	=	a	b	a	b	a	b
p	=	0	0	1	2	3	4
z	=	0	0	4	0	2	0

Период строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её период: кратчайшую строку G , для которой S является конкатенацией нескольких копий G .
- Пример 2: $S = \text{«хуз»}$, $G = \text{«хуз»}$.
- Префикс-функция и z -функция:

$$S = \text{ x y z}$$

$$p = 0 \ 0 \ 0$$

$$z = 0 \ 0 \ 0$$

Период строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её период: кратчайшую строку G , для которой S является конкатенацией нескольких копий G .
- Пример 3: $S = \text{«abcabca»}$, $G = \text{«abcabca»}$.
- Префикс-функция и z -функция:

S	=	a	b	c	a	b	c	a
p	=	0	0	0	1	2	3	4
z	=	0	0	0	4	0	0	1

Период строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её период: кратчайшую строку G , для которой S является конкатенацией нескольких копий G .
- Пример 4: $S = \text{«аааааа»}$, $G = \text{«а»}$.
- Префикс-функция и z -функция:

S	=	а	а	а	а	а	а
p	=	0	1	2	3	4	5
z	=	0	5	4	3	2	1

Период строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её период: кратчайшую строку G , для которой S является конкатенацией нескольких копий G .
- Генератор: $g = |S| - p_{last}$.
- Генератор: $g = \min i : i + z_i = |S|$, или $i = n$, если такого нет.
- Если $|S|$ делится на g , то ответ — префикс S длины g .
- Если $|S|$ не делится на g , то ответ — вся строка S .

Период строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её период: кратчайшую строку G , для которой S является конкатенацией нескольких копий G .
- Пример 1: $S = \text{«ababab»}$, $G = \text{«ab»}$.
- Префикс-функция и z -функция:

S	=	a	b	a	b	a	b
p	=	0	0	1	2	3	4
z	=	0	0	4	0	2	0
- Генератор: $g = |S| - p_{last}$.
- Генератор: $g = \min i : i + z_i = |S|$, или $i = n$, если такого нет.
- Если $|S|$ делится на g , то ответ — префикс S длины g .
- Если $|S|$ не делится на g , то ответ — вся строка S .

Период строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её период: кратчайшую строку G , для которой S является конкатенацией нескольких копий G .
- Пример 2: $S = \text{«хуз»}$, $G = \text{«хуз»}$.
- Префикс-функция и z -функция:

S	$=$	x	y	z
p	$=$	0	0	0
z	$=$	0	0	0
- Генератор: $g = |S| - p_{last}$.
- Генератор: $g = \min i : i + z_i = |S|$, или $i = n$, если такого нет.
- Если $|S|$ делится на g , то ответ — префикс S длины g .
- Если $|S|$ не делится на g , то ответ — вся строка S .

Период строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её период: кратчайшую строку G , для которой S является конкатенацией нескольких копий G .
- Пример 3: $S = \text{«abcabca»}$, $G = \text{«abcabca»}$.
- Префикс-функция и z -функция:

S	=	a	b	c	a	b	c	a
p	=	0	0	0	1	2	3	4
z	=	0	0	0	4	0	0	1
- Генератор: $g = |S| - p_{last}$.
- Генератор: $g = \min i : i + z_i = |S|$, или $i = n$, если такого нет.
- Если $|S|$ делится на g , то ответ — префикс S длины g .
- Если $|S|$ не делится на g , то ответ — вся строка S .

Период строки

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите её период: кратчайшую строку G , для которой S является конкатенацией нескольких копий G .
- Пример 4: $S = \text{«аааааа»}$, $G = \text{«а»}$.
- Префикс-функция и z -функция:

S	=	а	а	а	а	а	а
p	=	0	1	2	3	4	5
z	=	0	5	4	3	2	1
- Генератор: $g = |S| - p_{last}$.
- Генератор: $g = \min i : i + z_i = |S|$, или $i = n$, если такого нет.
- Если $|S|$ делится на g , то ответ — префикс S длины g .
- Если $|S|$ не делится на g , то ответ — вся строка S .

Содержание

- 1 Введение
 - Определения
 - Задача
 - Наивное решение
 - Наивный алгоритм: код
- 2 Хеширование строк
 - Идея
 - Полиномиальный хеш
 - Хеши подстрок одинаковой длины
 - Алгоритм Рабина–Карпа: код
 - Анализ
 - Выбор констант
 - Хеши произвольных подстрок
- 3 Префикс-функция
 - Идея
 - Префикс-функция
 - Пример
 - Поиск подстроки
 - Алгоритм Кнута–Морриса–Пратта: код
 - Анализ
- 4 Z-функция
 - Идея
 - Z-функция
 - Пример
 - Поиск подстроки
 - Алгоритм Гасфилда: код
 - Анализ
- 5 Задачи
 - Генератор строки
 - Период строки
- 6 Палиндромы
 - Задача
 - Идея
 - Радиусы палиндромов
 - Пример
 - Алгоритм Манакера: код
 - Анализ

Задача

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите все её подстроки, являющиеся палиндромами.
- Пример: $S = \text{«ababaab»}$.

Задача

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите все её подстроки, являющиеся палиндромами.
- Пример: $S = \text{«ababaab»}$.
- Палиндромов в различных позициях 13.
- В общем случае их может быть порядка $|S|^2$.
- Как организовать информацию, чтобы узнать о них за линейное время?

Задача

Задача:

- Дана строка S .
- Найдите все её подстроки, являющиеся палиндромами.
- Пример: $S = \text{«ababaab»}$.
- Палиндромов в различных позициях 13.
- В общем случае их может быть порядка $|S|^2$.
- Как организовать информацию, чтобы узнать о них за линейное время?
- Если $S[x\dots y]$ палиндром, то $S[x+1\dots y-1]$ — тоже палиндром.
- Получается, что для каждого центра можно найти максимальный размер палиндрома с таким центром.
- Но палиндромы бывают чётной и нечётной длины!

Идея

- Поставим какой-нибудь символ (например, «*») между каждыми двумя буквами S , а также до и после:
«abaа» → «*a*b*a*a*».
- Теперь бывшие палиндромы чётной длины — это палиндромы нечётной длины с центром в «*».

Идея

- Поставим какой-нибудь символ (например, «*») между каждыми двумя буквами S , а также до и после:
«aba» → «*a*b*a*a*».
- Теперь бывшие палиндромы чётной длины — это палиндромы нечётной длины с центром в «*».
- Идея: ускорим наивное решение, которое для каждого центра i ищет максимальный размер палиндрома $w(i)$ — такое число, что для всех $x < w(i)$ символы $S[i - x]$ и $S[i + x]$ совпадают.
- Пусть $S = \text{«абасаба»}$, и мы ищем только палиндромы нечётной длины.
- Выяснили, что «абасаба» — палиндром.

Идея

- Поставим какой-нибудь символ (например, «*») между каждыми двумя буквами S , а также до и после:
«aba» → «*a*b*a*a*».
- Теперь бывшие палиндромы чётной длины — это палиндромы нечётной длины с центром в «*».
- Идея: ускорим наивное решение, которое для каждого центра i ищет максимальный размер палиндрома $w(i)$ — такое число, что для всех $x < w(i)$ символы $S[i - x]$ и $S[i + x]$ совпадают.
- Пусть $S = \text{«abacaba»}$, и мы ищем только палиндромы нечётной длины.
- Выяснили, что «abacaba» — палиндром.
- *Внутри этой строки* вокруг правой буквы «b» всё точно так же, как вокруг левой буквы «b» (но перевёрнуто).

Идея

- Поставим какой-нибудь символ (например, «*») между каждыми двумя буквами S , а также до и после:
«abaа» → «*a*b*a*a*».
- Теперь бывшие палиндромы чётной длины — это палиндромы нечётной длины с центром в «*».
- Идея: ускорим наивное решение, которое для каждого центра i ищет максимальный размер палиндрома $w(i)$ — такое число, что для всех $x < w(i)$ символы $S[i - x]$ и $S[i + x]$ совпадают.
- Пусть $S = \text{«abacaba»}$, и мы ищем только палиндромы нечётной длины.
- Выяснили, что «abacaba» — палиндром.
- *Внутри этой строки* вокруг правой буквы «b» всё точно так же, как вокруг левой буквы «b» (но перевернуто).
- Пример 1:

S	=	a	b	a	c	a	b	a	b	a
w	=	1	2	1	4	1	2	3	2	1

Идея

- Поставим какой-нибудь символ (например, «*») между каждыми двумя буквами S , а также до и после:
«abaа» → «*a*b*a*a*».
- Теперь бывшие палиндромы чётной длины — это палиндромы нечётной длины с центром в «*».
- Идея: ускорим наивное решение, которое для каждого центра i ищет максимальный размер палиндрома $w(i)$ — такое число, что для всех $x < w(i)$ символы $S[i - x]$ и $S[i + x]$ совпадают.
- Пусть $S = \text{«abacababa»}$, и мы ищем только палиндромы нечётной длины.
- Выяснили, что «abacaba» — палиндром.
- *Внутри этой строки* вокруг правой буквы «b» всё точно так же, как вокруг левой буквы «b» (но перевернуто).
- Пример 2:

S	=	a	b	a	c	a	b	b
w	=	1	2	1	3	1	1	1

Радиусы палиндромов

- Вычисляем радиусы палиндромов $w(i)$ слева направо.
- Пусть мы находимся в позиции $i \in [0, n)$.

Радиусы палиндромов

- Вычисляем радиусы палиндромов $w(i)$ слева направо.
- Пусть мы находимся в позиции $i \in [0, n)$.
- Из найденных палиндромов, будем помнить тот, который кончается как можно правее.
- Пусть это палиндром $S(lo...hi)$.

Радиусы палиндромов

- Вычисляем радиусы палиндромов $w(i)$ слева направо.
- Пусть мы находимся в позиции $i \in [0, n)$.
- Из найденных палиндромов, будем помнить тот, который кончается как можно правее.
- Пусть это палиндром $S(lo...hi)$.
- Если позиция i лежит в $(lo...hi)$, посмотрим на позицию $j = lo + hi - i$.
- Подстрока с центром в j и левым краем lo — это перевёрнутая подстрока с центром в i и правым краем hi .
- Так что оценка снизу на $w(i)$ — это $\min(hi - i, w(j))$.

Радиусы палиндромов

- Вычисляем радиусы палиндромов $w(i)$ слева направо.
- Пусть мы находимся в позиции $i \in [0, n)$.
- Из найденных палиндромов, будем помнить тот, который кончается как можно правее.
- Пусть это палиндром $S(lo...hi)$.
- Если позиция i лежит в $(lo...hi)$, посмотрим на позицию $j = lo + hi - i$.
- Подстрока с центром в j и левым краем lo — это перевёрнутая подстрока с центром в i и правым краем hi .
- Так что оценка снизу на $w(i)$ — это $\min(hi - i, w(j))$.
- Теперь, пока буквы $S[i - w(i)]$ и $S[i + w(i)]$ совпадают, будем увеличивать $w(i)$.

Радиусы палиндромов

- Вычисляем радиусы палиндромов $w(i)$ слева направо.
- Пусть мы находимся в позиции $i \in [0, n)$.
- Из найденных палиндромов, будем помнить тот, который кончается как можно правее.
- Пусть это палиндром $S(lo...hi)$.
- Если позиция i лежит в $(lo...hi)$, посмотрим на позицию $j = lo + hi - i$.
- Подстрока с центром в j и левым краем lo — это перевёрнутая подстрока с центром в i и правым краем hi .
- Так что оценка снизу на $w(i)$ — это $\min(hi - i, w(j))$.
- Теперь, пока буквы $S[i - w(i)]$ и $S[i + w(i)]$ совпадают, будем увеличивать $w(i)$.
- Проверим, не оказался ли конец найденного палиндрома — это позиция $i + w(i)$ — правее hi .

Пример

Пример: $S = a b c b a b d b a b a b c b$
 $w = 1 1 3 1 2 1 4 1 2 3 2 1 2 1$

Алгоритм Манакера: код

```
1  vector <int> palindromes (string t) {
2      int n = t.size ();
3      vector <int> w (n);
4      int lo = 0, hi = 0;
5      for (int i = 0; i < n; i++) {
6          if (i < hi)
7              w[i] = min (w[lo + hi - i], hi - i);
8          while (i - w[i] >= 0 && i + w[i] < n &&
9              t[i - w[i]] == t[i + w[i]])
10             w[i] += 1;
11         if (hi < i + w[i]) {
12             lo = i - w[i];
13             hi = i + w[i];
14         }
15     }
16     return w;
17 }
```

ВВОД:

ababaab

ВЫВОД:

13

Анализ

- Общее время работы:

Анализ

- Общее время работы: $O(n)$.

Анализ

- Общее время работы: $O(n)$.
- Действительно, при росте радиуса число hi тоже растёт.

Вопросы?

Вопросы?