

# Графы

Борис Золотов (Б09, Б11)

Михаил Иванов (Б07, Б08)

Иван Казменко (Б01, Б05)

Владислав Макаров (Б02, Б03)

Мария Радионова (Б06)

Арина Филимонова (Б10)

Санкт-Петербургский Государственный Университет  
Факультет математики и компьютерных наук

Среда, 3 декабря 2025 года

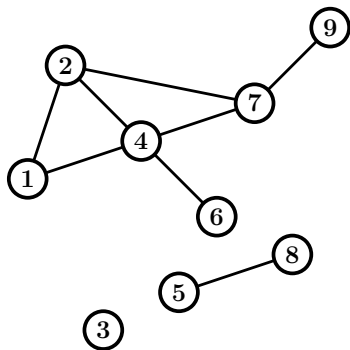
# Содержание

- 1 Введение
  - Определения
  - Задание графа
  - Хранение графа
  - Код
- 2 Поиск в ширину
  - Пример
  - Код
- 3 Поиск в глубину
  - Пример
  - Код
- 4 Неявные графы
  - Клетчатая доска
  - Шахматный конь
- 5 Задачи
  - Связность
  - Дерево
  - Топологическая сортировка
  - Мосты

# Содержание

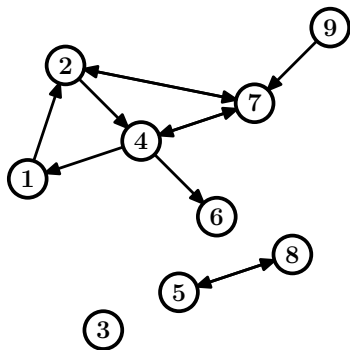
- 1 Введение
  - Определения
  - Задание графа
  - Хранение графа
  - Код
- 2 Поиск в ширину
  - Пример
  - Код
- 3 Поиск в глубину
  - Пример
  - Код
- 4 Неявные графы
  - Клетчатая доска
  - Шахматный конь
- 5 Задачи
  - Связность
  - Дерево
  - Топологическая сортировка
  - Мосты

# Определения



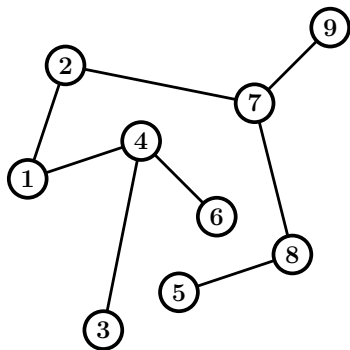
Определение: граф (неориентированный) — это пара  $(V, E)$ , где  $V$  — множество вершин, а  $E$  — множество (неориентированных) рёбер. Каждое ребро — это неупорядоченная пара вершин.

# Определения



Определение: ориентированный граф (орграф) — это пара  $(V, E)$ , где  $V$  — множество вершин, а  $E$  — множество дуг (ориентированных рёбер). Каждое ребро — это упорядоченная пара вершин.

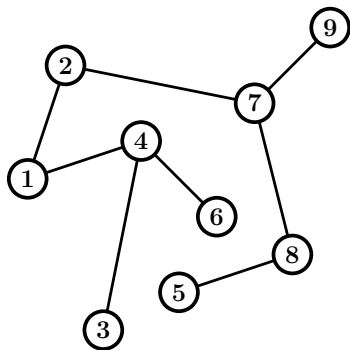
# Определения



Определение: дерево — это связный граф без циклов.

*Необходимые определения: компонента связности, связный граф, цикл.*

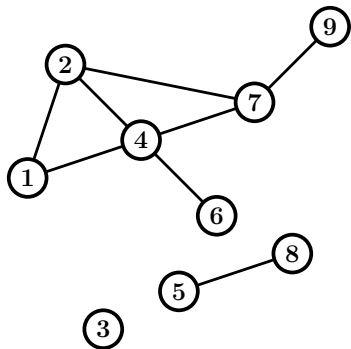
# Определения



Критерий: обыкновенный граф является деревом, если он связан и  $|E| = |V| - 1$ .

*Необходимое определение: обыкновенный (простой) граф.*

# Задание графа



Ввод:

9 8

1 2

1 4

2 7

2 4

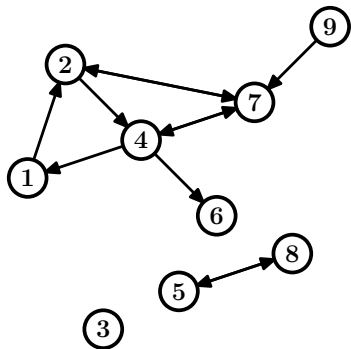
4 6

4 7

5 8

7 9

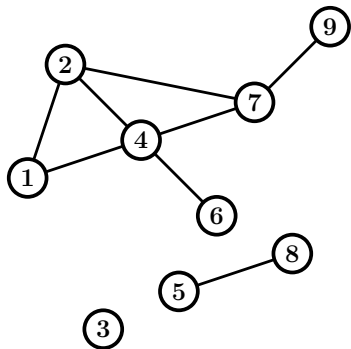
# Задание графа



Ввод:

```
9 11
1 2
2 7
2 4
4 1
7 2
4 6
4 7
5 8
7 4
8 5
9 7
```

# Матрица смежности

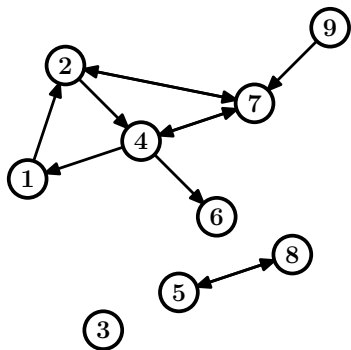


Ввод:

9 8  
 1 2  
 1 4  
 2 7  
 2 4  
 4 6  
 4 7  
 5 8  
 7 9

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	1	0	0	0	1	1	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	1	0	0	0	0	0
7	0	1	0	1	0	0	0	0	1
8	0	0	0	0	1	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	1	0	0

# Матрица смежности



Ввод:

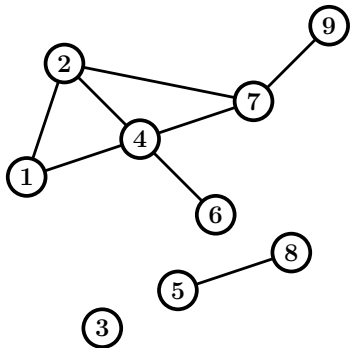
```

9 11
1 2
2 7
2 4
4 1
7 2
4 6
4 7
5 8
7 4
8 5
9 7

```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	1	1	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	1	0	1	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	1	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	1	0	0

# Списки смежных вершин

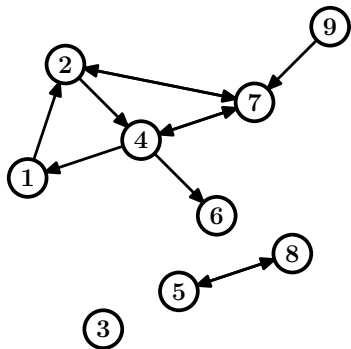


Ввод:

```
9 8
1 2
1 4
2 7
2 4
4 6
4 7
5 8
7 9
```

1	2	4		
2	1	7	4	
3				
4	1	2	6	7
5	8			
6	4			
7	2	4	9	
8	5			
9	7			

# Списки смежных вершин

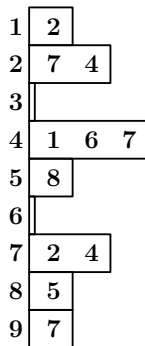


Ввод:

```

9 11
1 2
2 7
2 4
4 1
7 2
4 6
4 7
5 8
7 4
8 5
9 7

```



# Матрица смежности

```

1  #include <iostream>
2  #include <vector>
3  using namespace std;
4
5  int main () {
6      int n, m;
7      cin >> n >> m;
8      vector <vector <int> > a (n,
9          vector <int> (n, 0));
10     for (int j = 0; j < m; j++) {
11         int u, v;
12         cin >> u >> v;
13         u -= 1;
14         v -= 1;
15         a[u][v] = 1;
16         a[v][u] = 1;
17     }
18     return 0;
19 }
```

ВВОД:

```

9 8
1 2
1 4
2 7
2 4
4 6
4 7
5 8
7 9
```

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	1	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	0	1	0	1	0	0	0	0	1
7	0	0	0	0	1	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0	0

# Матрица смежности

```

1  #include <iostream>
2  #include <vector>
3  using namespace std;
4
5  int main () {
6      int n, m;
7      cin >> n >> m;
8      vector <vector <int> > a (n,
9          vector <int> (n, 0));
10     for (int j = 0; j < m; j++) {
11         int u, v;
12         cin >> u >> v;
13         u -= 1;
14         v -= 1;
15         a[u][v] = 1;
16
17     }
18     return 0;
19 }

```

ВВОД:

```

9 11
1 2
2 7
2 4
4 1
7 2
4 6
4 7
5 8
7 4
8 5
9 7

```

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	1	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	1	0	1	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	1	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0	0

# Списки смежных вершин

```
1  #include <iostream>
2  #include <vector>
3  using namespace std;
4
5  int main () {
6      int n, m;
7      cin >> n >> m;
8      vector <vector <int> > adj (n);
9
10     for (int j = 0; j < m; j++) {
11         int u, v;
12         cin >> u >> v;
13         u -= 1;
14         v -= 1;
15         adj[u].push_back (v);
16         adj[v].push_back (u);
17     }
18     return 0;
19 }
```

ВВОД:

```
9 8
1 2
1 4
2 7
2 4
4 6
4 7
5 8
7 9
```

0	1	3		
1	0	6	3	
2				
3	0	1	5	6
4	7			
5	3			
6	1	3	8	
7	4			
8	6			

# Списки смежных вершин

```

1  #include <iostream>
2  #include <vector>
3  using namespace std;
4
5  int main () {
6      int n, m;
7      cin >> n >> m;
8      vector <vector <int> > adj (n);
9
10     for (int j = 0; j < m; j++) {
11         int u, v;
12         cin >> u >> v;
13         u -= 1;
14         v -= 1;
15         adj[u].push_back (v);
16     }
17     return 0;
18 }
19 }

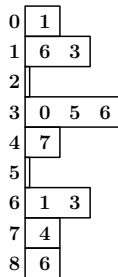
```

ВВОД:

```

9 11
1 2
2 7
2 4
4 1
7 2
4 6
4 7
5 8
7 4
8 5
9 7

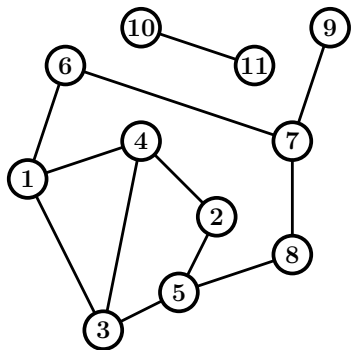
```



# Содержание

- 1 Введение
  - Определения
  - Задание графа
  - Хранение графа
  - Код
- 2 Поиск в ширину
  - Пример
  - Код
- 3 Поиск в глубину
  - Пример
  - Код
- 4 Неявные графы
  - Клетчатая доска
  - Шахматный конь
- 5 Задачи
  - Связность
  - Дерево
  - Топологическая сортировка
  - Мосты

# Пример



Задача: найдите кратчайшие расстояния от вершины 1 до всех остальных вершин.

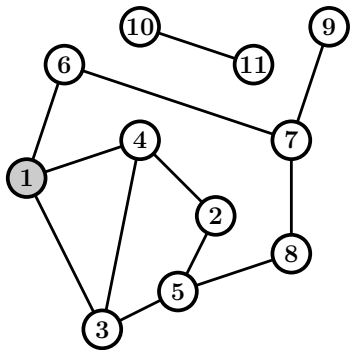
Ввод:

```
11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11
```

Вывод:

```
1: 0
3: 1
4: 1
6: 1
5: 2
2: 2
7: 2
8: 3
9: 3
```

# Пример



1

ВВОД:

11 12

1 6

1 4

6 7

2 5

4 3

4 2

5 8

7 8

7 9

1 3

3 5

10 11

ВЫВОД:

1: 0

3: 1

4: 1

6: 1

5: 2

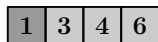
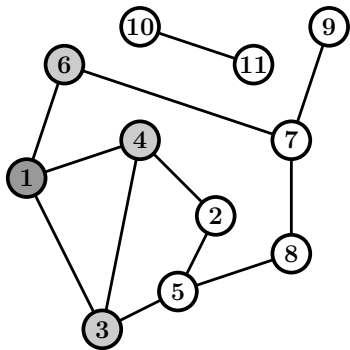
2: 2

7: 2

8: 3

9: 3

## Пример



ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

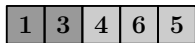
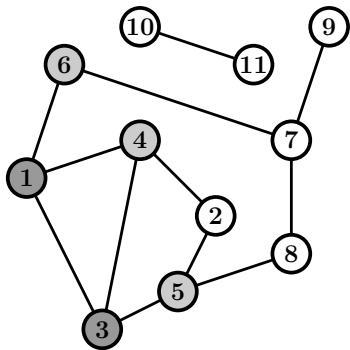
ВЫВОД:

```

1: 0
3: 1
4: 1
6: 1
5: 2
2: 2
7: 2
8: 3
9: 3

```

## Пример



ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

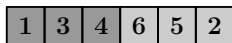
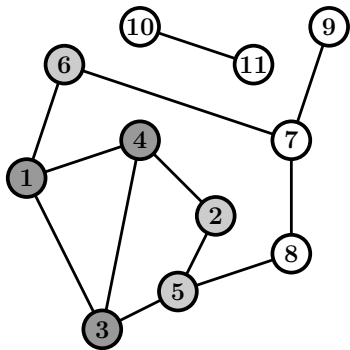
ВЫВОД:

```

1: 0
3: 1
4: 1
6: 1
5: 2
2: 2
7: 2
8: 3
9: 3

```

## Пример



ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

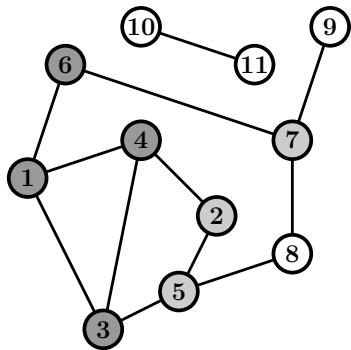
ВЫВОД:

```

1: 0
3: 1
4: 1
6: 1
5: 2
2: 2
7: 2
8: 3
9: 3

```

## Пример



ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

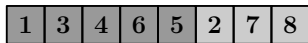
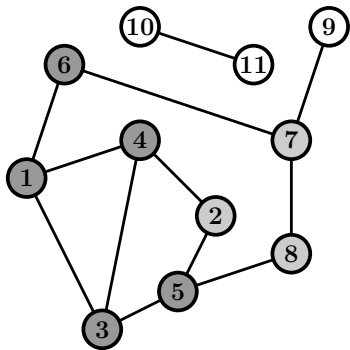
ВЫВОД:

```

1: 0
3: 1
4: 1
6: 1
5: 2
2: 2
7: 2
8: 3
9: 3

```

## Пример



ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

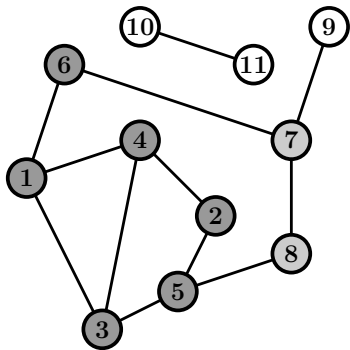
ВЫВОД:

```

1: 0
3: 1
4: 1
6: 1
5: 2
2: 2
7: 2
8: 3
9: 3

```

## Пример



1	3	4	6	5	2	7	8
---	---	---	---	---	---	---	---

ВВОД:

11 12

1 6

1 4

6 7

2 5

4 3

4 2

5 8

7 8

7 9

1 3

3 5

10 11

ВЫВОД:

1: 0

3: 1

4: 1

6: 1

5: 2

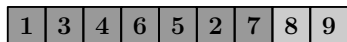
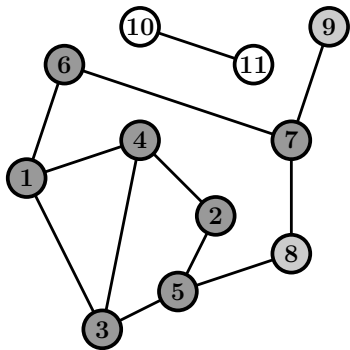
2: 2

7: 2

8: 3

9: 3

## Пример



ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

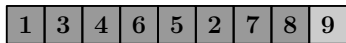
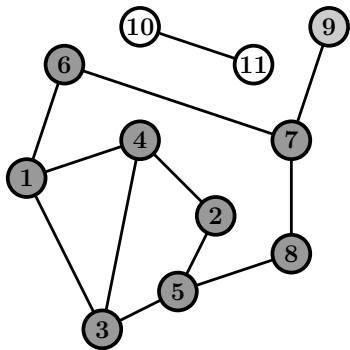
ВЫВОД:

```

1: 0
3: 1
4: 1
6: 1
5: 2
2: 2
7: 2
8: 3
9: 3

```

## Пример



ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

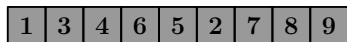
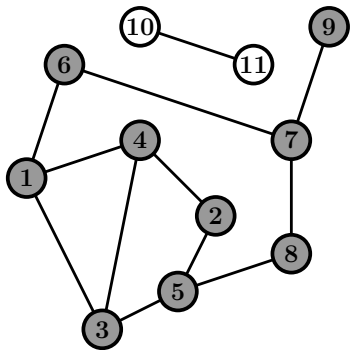
ВЫВОД:

```

1: 0
3: 1
4: 1
6: 1
5: 2
2: 2
7: 2
8: 3
9: 3

```

## Пример



ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

ВЫВОД:

```

1: 0
3: 1
4: 1
6: 1
5: 2
2: 2
7: 2
8: 3
9: 3

```

## Код breadth-first search

```
1  /* ... */
2  int const infinity = 1E9 + 1;
3  /* ... */
4      vector <int> d (n, infinity);
5      queue <int> q;
6      d[0] = 0;
7      q.push (0);
8      while (!q.empty ()) {
9          auto v = q.front ();
10         q.pop ();
11         cout << v + 1 << ": " << d[v] << endl;
12         for (int u = 0; u < n; u++) if (a[v][u]) {
13             if (d[u] == infinity) {
14                 d[u] = d[v] + 1;
15                 q.push (u);
16             }
17         }
18     }
19  /* ... */
```

Вывод:

```
1: 0
3: 1
4: 1
6: 1
5: 2
2: 2
7: 2
8: 3
9: 3
```

## Код breadth-first search

```
1  /* ... */
2  int const infinity = 1E9 + 1;
3  /* ... */
4  vector <int> d (n, infinity);
5  queue <int> q;
6  d[0] = 0;
7  q.push (0);
8  while (!q.empty ()) {
9      auto v = q.front ();
10     q.pop ();
11     cout << v + 1 << ": " << d[v] << endl;
12     for (auto u : adj[v]) {
13         if (d[u] == infinity) {
14             d[u] = d[v] + 1;
15             q.push (u);
16         }
17     }
18 }
19 /* ... */
```

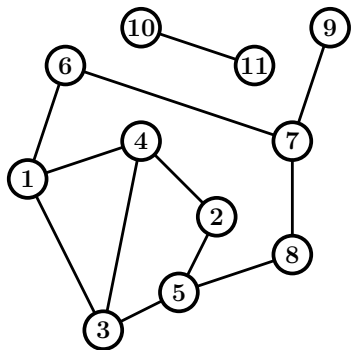
Вывод:

```
1: 0
3: 1
4: 1
6: 1
5: 2
2: 2
7: 2
8: 3
9: 3
```

# Содержание

- 1 Введение
  - Определения
  - Задание графа
  - Хранение графа
  - Код
- 2 Поиск в ширину
  - Пример
  - Код
- 3 Поиск в глубину
  - Пример
  - Код
- 4 Неявные графы
  - Клетчатая доска
  - Шахматный конь
- 5 Задачи
  - Связность
  - Дерево
  - Топологическая сортировка
  - Мосты

# Пример



Задача: посетите все вершины, достижимые из вершины 1.

ВВОД:

```

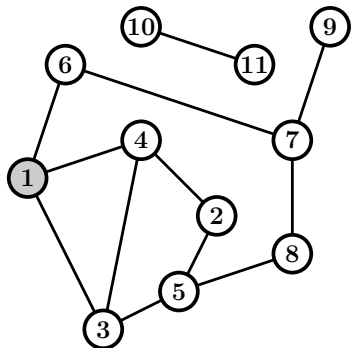
11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11
  
```

ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1
  
```

## Пример



1

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

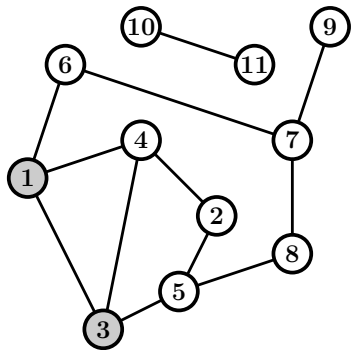
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

## Пример



1	3
---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

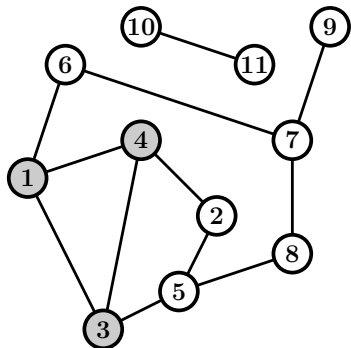
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

## Пример



1	3	4
---	---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

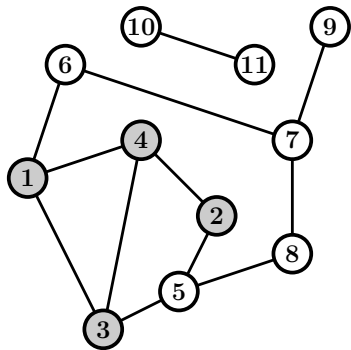
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

## Пример



1	3	4	2
---	---	---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

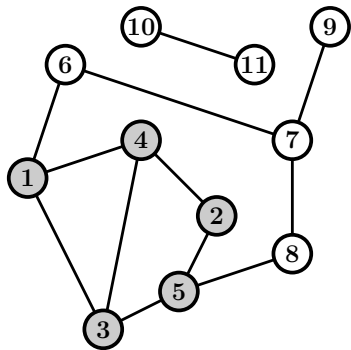
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

## Пример



1	3	4	2	5
---	---	---	---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

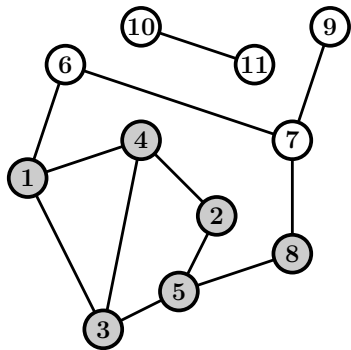
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

## Пример



1	3	4	2	5	8
---	---	---	---	---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

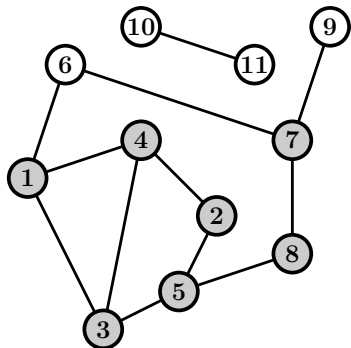
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

## Пример



1	3	4	2	5	8	7
---	---	---	---	---	---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

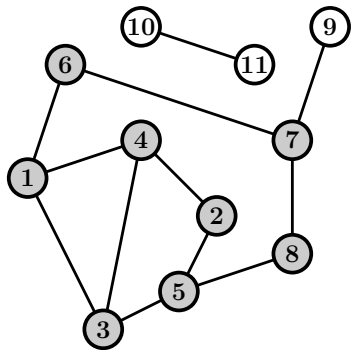
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

## Пример



1	3	4	2	5	8	7	6
---	---	---	---	---	---	---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

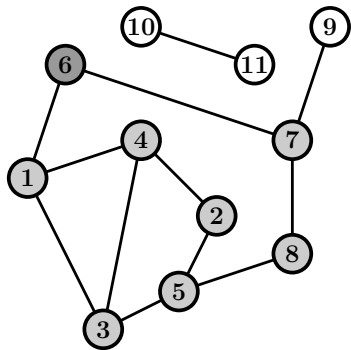
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

## Пример



1	3	4	2	5	8	7
---	---	---	---	---	---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

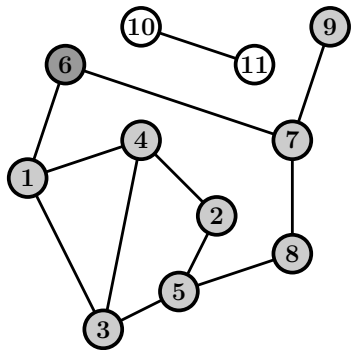
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

## Пример



1	3	4	2	5	8	7	9
---	---	---	---	---	---	---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

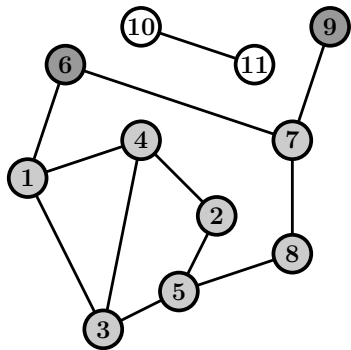
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

## Пример



1	3	4	2	5	8	7
---	---	---	---	---	---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

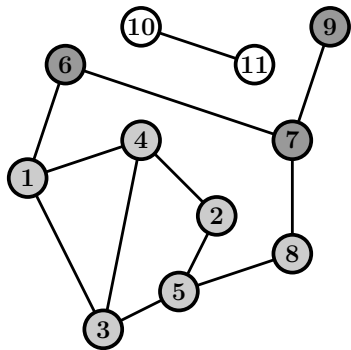
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

## Пример



1	3	4	2	5	8
---	---	---	---	---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

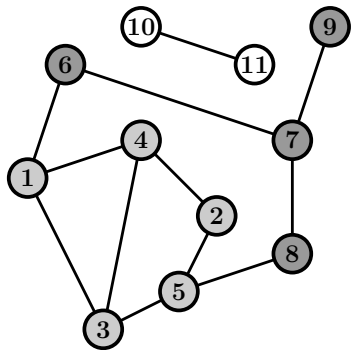
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

## Пример



1	3	4	2	5
---	---	---	---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

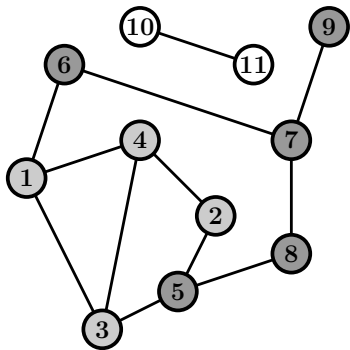
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

## Пример



1	3	4	2
---	---	---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

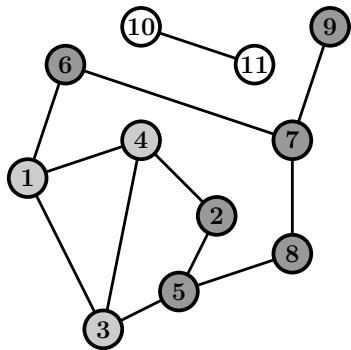
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

## Пример



1	3	4
---	---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

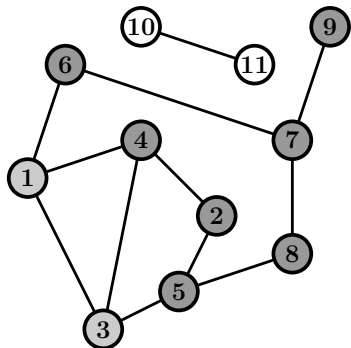
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

## Пример



1	3
---	---

ВВОД:

```

11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11

```

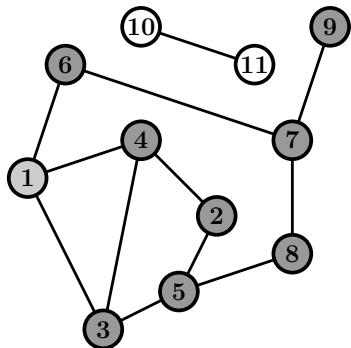
ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1

```

# Пример



1

ВВОД:

```

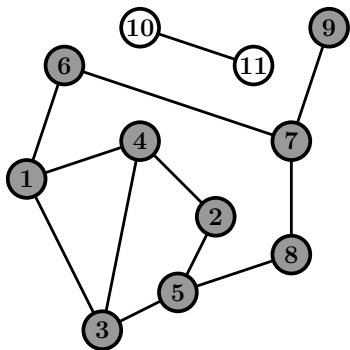
11 12
1 6
1 4
6 7
2 5
4 3
4 2
5 8
7 8
7 9
1 3
3 5
10 11
  
```

ВЫВОД:

```

in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1
  
```

# Пример



ВВОД:

11 12

1 6

1 4

6 7

2 5

4 3

4 2

5 8

7 8

7 9

1 3

3 5

10 11

ВЫВОД:

in 1

in 3

in 4

in 2

in 5

in 8

in 7

in 6

out 6

in 9

out 9

out 7

out 8

out 5

out 2

out 4

out 3

out 1

## Код depth-first search

```
1  /* ... */
2  vector <vector <int> > a;
3  vector <bool> vis;
4  int n, m;
5
6  void dfs (int v) {
7      if (vis[v])
8          return;
9      vis[v] = true;
10     cout << "in " << v + 1 << endl;
11     for (int u = 0; u < n; u++) if (a[v][u]) {
12         dfs (u);
13     }
14     cout << "out " << v + 1 << endl;
15 }
16 /* ... */
17     vis = vector <bool> (n);
18     dfs (0);
19 /* ... */
```

ВЫВОД:

```
in 1
in 3
in 4
in 2
in 5
in 8
in 7
in 6
out 6
in 9
out 9
out 7
out 8
out 5
out 2
out 4
out 3
out 1
```

## Код depth-first search

```
1  /* ... */
2  vector <vector <int> > adj;
3  vector <bool> vis;
4  int n, m;
5
6  void dfs (int v) {
7      if (vis[v])
8          return;
9      vis[v] = true;
10     cout << "in " << v + 1 << endl;
11     for (auto u : adj[v]) {
12         dfs (u);
13     }
14     cout << "out " << v + 1 << endl;
15 }
16 /* ... */
17     vis = vector <bool> (n);
18     dfs (0);
19 /* ... */
```

ВЫВОД:

```
in 1
in 6
in 7
in 8
in 5
in 2
in 4
in 3
out 3
out 4
out 2
out 5
out 8
in 9
out 9
out 6
out 1
```

# Содержание

- 1 Введение
  - Определения
  - Задание графа
  - Хранение графа
  - Код
- 2 Поиск в ширину
  - Пример
  - Код
- 3 Поиск в глубину
  - Пример
  - Код
- 4 Неявные графы
  - Клетчатая доска
  - Шахматный конь
- 5 Задачи
  - Связность
  - Дерево
  - Топологическая сортировка
  - Мосты

# Клетчатая доска

Пример 1:

- Есть клетчатая доска.
- Некоторые клетки заняты.
- Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.
- За один шаг можно перемещаться на соседнюю незанятую клетку.
- Определите, до куда можно добраться из начальной клетки.

# Клетчатая доска

Пример 1:

- Есть клетчатая доска.
- Некоторые клетки заняты.
- Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.
- За один шаг можно перемещаться на соседнюю незанятую клетку.
- Определите, куда можно добраться из начальной клетки.

Как будем решать:

- Граф: вершины — клетки, рёбра — переходы в соседей.

# Клетчатая доска

Пример 1:

- Есть клетчатая доска.
- Некоторые клетки заняты.
- Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.
- За один шаг можно перемещаться на соседнюю незанятую клетку.
- Определите, докуда можно добраться из начальной клетки.

Как будем решать:

- Граф: вершины — клетки, рёбра — переходы в соседей.
- Нужно найти компоненту связности начальной клетки.

# Клетчатая доска

Пример 1:

- Есть клетчатая доска.
- Некоторые клетки заняты.
- Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.
- За один шаг можно перемещаться на соседнюю незанятую клетку.
- Определите, куда можно добраться из начальной клетки.

Как будем решать:

- Граф: вершины — клетки, рёбра — переходы в соседей.
- Нужно найти компоненту связности начальной клетки.
- Будем нумеровать вершины и рёбра?

## Клетчатая доска — решение

- Граф: вершины — клетки, рёбра — переходы в соседей.
- Нужно найти компоненту связности начальной клетки.
- Вершина — это координаты (row, col).

# Клетчатая доска — решение

- Граф: вершины — клетки, рёбра — переходы в соседей.
- Нужно найти компоненту связности начальной клетки.
- Вершина — это координаты (row, col).
- Рёбра:
  - в (row - 1, col),
  - в (row, col - 1),
  - в (row + 1, col),
  - в (row, col + 1).

# Клетчатая доска — решение

- Граф: вершины — клетки, рёбра — переходы в соседей.
- Нужно найти компоненту связности начальной клетки.

```
1  int const dirs = 4;
2  int const dRow [dirs] = {-1, 0, +1, 0};
3  int const dCol [dirs] = { 0, -1, 0, +1};
4  /* ... */
5  void dfs (int row, int col) {
6      if (vis[row][col]) return;
7      vis[row][col] = true;
8      for (int dir = 0; dir < dirs; dir++) {
9          int nRow = row + dRow[dir];
10         int nCol = col + dCol[dir];
11         if (0 <= nRow && nRow < rows &&
12             0 <= nCol && nCol < cols &&
13             !wall[nRow][nCol]) {
14             dfs (nRow, nCol);
15         }
16     }
17 }
```

# Шахматный конь

Пример 2:

- На шахматной доске  $n \times n$  в клетке  $A$  стоит конь.
- За какое минимальное количество ходов он может попасть в клетку  $B$ ?

# Шахматный конь

Пример 2:

- На шахматной доске  $n \times n$  в клетке  $A$  стоит конь.
- За какое минимальное количество ходов он может попасть в клетку  $B$ ?

Как будем решать:

- Граф: вершины — клетки, рёбра — ходы коня.

# Шахматный конь

Пример 2:

- На шахматной доске  $n \times n$  в клетке  $A$  стоит конь.
- За какое минимальное количество ходов он может попасть в клетку  $B$ ?

Как будем решать:

- Граф: вершины — клетки, рёбра — ходы коня.
- Нужно запустить поиск в ширину из клетки  $A$ .

# Шахматный конь — решение

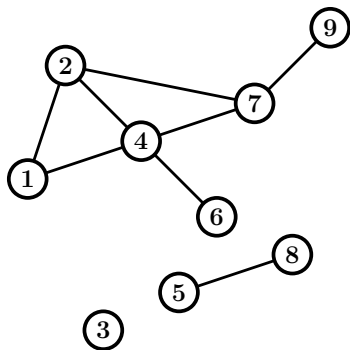
- Граф: вершины — клетки, рёбра — ходы коня.
- Нужно запустить поиск в ширину из клетки A.

```
1  int const dirs = 8;
2  int const dRow [dirs] = {-1, -2, -2, -1, +1, +2, +2, +1};
3  int const dCol [dirs] = {-2, -1, +1, +2, +2, +1, -1, -2};
4  /* ... */
5      while (!q.empty ()) {
6          int row = q.front ().first;
7          int col = q.front ().second;
8          q.pop ();
9          for (int dir = 0; dir < dirs; dir++) {
10             int nRow = row + dRow[dir];
11             int nCol = col + dCol[dir];
12             if (0 <= nRow && nRow < rows &&
13                 0 <= nCol && nCol < cols &&
14                 d[nRow][nCol] == infinity) {
15                 d[nRow][nCol] = d[row][col] + 1;
16                 q.push (make_pair (nRow, nCol));
17             }
18         }
```

# Содержание

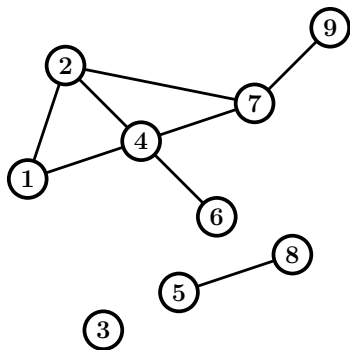
- 1 Введение
  - Определения
  - Задание графа
  - Хранение графа
  - Код
- 2 Поиск в ширину
  - Пример
  - Код
- 3 Поиск в глубину
  - Пример
  - Код
- 4 Неявные графы
  - Клетчатая доска
  - Шахматный конь
- 5 Задачи
  - Связность
  - Дерево
  - Топологическая сортировка
  - Мосты

# СВЯЗНОСТЬ



Дан неориентированный граф. Проверьте, связан ли он.

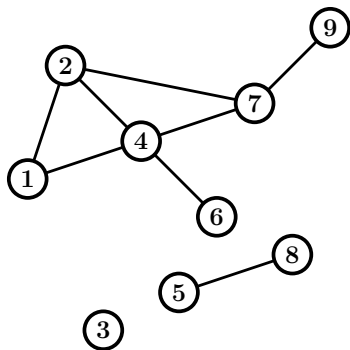
# СВЯЗНОСТЬ



Дан неориентированный граф. Проверьте, связан ли он.  
Как будем решать:

- Запустим поиск из любой вершины.

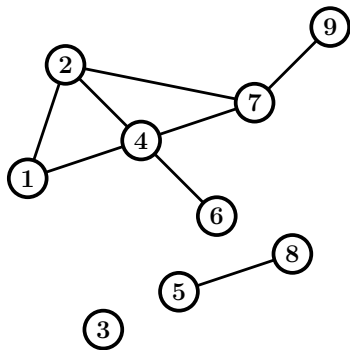
# СВЯЗНОСТЬ



Дан неориентированный граф. Проверьте, связан ли он.  
Как будем решать:

- Запустим поиск из любой вершины.
- Можно поиск в ширину, можно поиск в глубину.

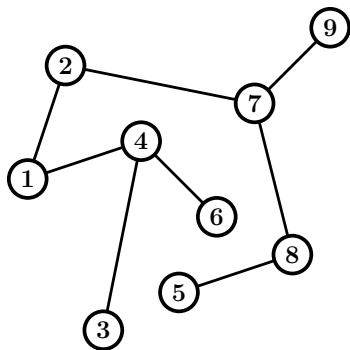
# СВЯЗНОСТЬ



Дан неориентированный граф. Проверьте, связан ли он.  
Как будем решать:

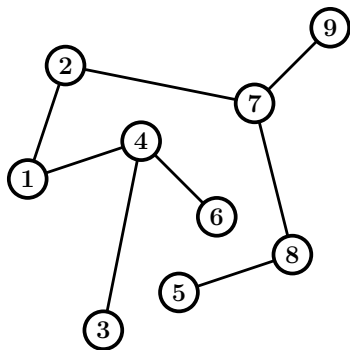
- Запустим поиск из любой вершины.
- Можно поиск в ширину, можно поиск в глубину.
- Проверим, что мы посетили все вершины.

# Дерево



Дан неориентированный граф. Проверьте, является ли он деревом.

# Дерево

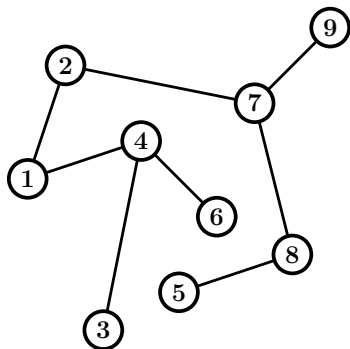


Дан неориентированный граф. Проверьте, является ли он деревом.

Как будем решать:

- Проверим связность.

# Дерево



Дан неориентированный граф. Проверьте, является ли он деревом.

Как будем решать:

- Проверим связность.
- Проверим, что  $|V| = |E| + 1$ .

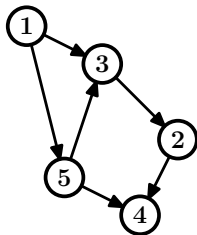
# Топологическая сортировка

Дан ориентированный граф. Расположите его вершины в таком порядке, чтобы все дуги следовали от более ранних вершин к более поздним. Или выясните, что это невозможно.

# Топологическая сортировка

Дан ориентированный граф. Расположите его вершины в таком порядке, чтобы все дуги следовали от более ранних вершин к более поздним. Или выясните, что это невозможно.

Пример 1:



Ввод:

```
5 6  
1 5  
5 3  
3 2  
2 4  
5 4  
1 3
```

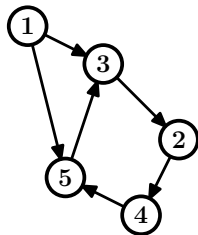
Вывод:

```
YES  
1 5 3 2 4
```

# Топологическая сортировка

Дан ориентированный граф. Расположите его вершины в таком порядке, чтобы все дуги следовали от более ранних вершин к более поздним. Или выясните, что это невозможно.

Пример 2:



Ввод:

```
5 6  
1 5  
5 3  
3 2  
2 4  
4 5  
1 3
```

Вывод:

NO

# Топологическая сортировка

Дан ориентированный граф. Расположите его вершины в таком порядке, чтобы все дуги следовали от более ранних вершин к более поздним. Или выясните, что это невозможно. Как будем решать:

- Посещаем вершины поиском в глубину.

# Топологическая сортировка

Дан ориентированный граф. Расположите его вершины в таком порядке, чтобы все дуги следовали от более ранних вершин к более поздним. Или выясните, что это невозможно. Как будем решать:

- Посещаем вершины поиском в глубину.
- Пусть мы находимся в какой-то вершине  $v$ .

# Топологическая сортировка

Дан ориентированный граф. Расположите его вершины в таком порядке, чтобы все дуги следовали от более ранних вершин к более поздним. Или выясните, что это невозможно.

Как будем решать:

- Посещаем вершины поиском в глубину.
- Пусть мы находимся в какой-то вершине  $v$ .
- Условимся, что, когда вершина посещена, она выведена, то есть добавлена в порядок.

# Топологическая сортировка

Дан ориентированный граф. Расположите его вершины в таком порядке, чтобы все дуги следовали от более ранних вершин к более поздним. Или выясните, что это невозможно.

Как будем решать:

- Посещаем вершины поиском в глубину.
- Пусть мы находимся в какой-то вершине  $v$ .
- Условимся, что, когда вершина посещена, она выведена, то есть добавлена в порядок.
- Посетим все вершины  $u$ , из которых есть дуга  $u \rightarrow v$ .

# Топологическая сортировка

Дан ориентированный граф. Расположите его вершины в таком порядке, чтобы все дуги следовали от более ранних вершин к более поздним. Или выясните, что это невозможно.

Как будем решать:

- Посещаем вершины поиском в глубину.
- Пусть мы находимся в какой-то вершине  $v$ .
- Условимся, что, когда вершина посещена, она выведена, то есть добавлена в порядок.
- Посетим все вершины  $u$ , из которых есть дуга  $u \rightarrow v$ .
- После этого выведем вершину  $v$ , тем самым выполнив наше условие.

# Топологическая сортировка

Как найти все такие  $u$ , для которых  $u \rightarrow v$ ?

# Топологическая сортировка

Как найти все такие  $u$ , для которых  $u \rightarrow v$ ?

- Можно хранить не сами рёбра  $(u \rightarrow v)$ , а обратные к ним  $(v \rightarrow u)$ .

# Топологическая сортировка

Как найти все такие  $u$ , для которых  $u \rightarrow v$ ?

- Можно хранить не сами рёбра ( $u \rightarrow v$ ), а обратные к ним ( $v \rightarrow u$ ).
- Можно найти обратный порядок, а потом его перевернуть.

# Топологическая сортировка

Как выяснить, что ответ не существует?

# Топологическая сортировка

Как выяснить, что ответ не существует?

- У вершины три состояния:
  - 0 ещё не посещали (fresh),
  - 1 начали посещать и не закончили (busy),
  - 2 уже посетили (done).

# Топологическая сортировка

Как выяснить, что ответ не существует?

- У вершины три состояния:
  - 0 ещё не посещали (fresh),
  - 1 начали посещать и не закончили (busy),
  - 2 уже посетили (done).
- Если мы пришли посещать вершину в состоянии fresh, запускаем алгоритм в ней.

# Топологическая сортировка

Как выяснить, что ответ не существует?

- У вершины три состояния:
  - 0 ещё не посещали (fresh),
  - 1 начали посещать и не закончили (busy),
  - 2 уже посетили (done).
- Если мы пришли посещать вершину в состоянии fresh, запускаем алгоритм в ней.
- Если мы пришли посещать вершину в состоянии done, ничего не делаем с ней.

# Топологическая сортировка

Как выяснить, что ответ не существует?

- У вершины три состояния:
  - 0 ещё не посещали (fresh),
  - 1 начали посещать и не закончили (busy),
  - 2 уже посетили (done).
- Если мы пришли посещать вершину в состоянии fresh, запускаем алгоритм в ней.
- Если мы пришли посещать вершину в состоянии done, ничего не делаем с ней.
- Если мы пришли посещать вершину в состоянии busy, значит, мы нашли цикл, и ответ не существует.

# Топологическая сортировка — код

```
1  vector <vector <int> > adj;
2  vector <int> vis;
3  vector <int> order;
4  int n, m;
5
6  enum {fresh, busy, done};
7
8  bool dfs (int v) {
9      if (vis[v] != fresh)
10         return vis[v] == done;
11     vis[v] = busy;
12     for (auto u : adj[v])
13         if (!dfs (u))
14             return false;
15     order.push_back (v);
16     vis[v] = done;
17     return true;
18 }
```

# Топологическая сортировка — код

```
1     cin >> n >> m;
2     adj = vector <vector <int> > (n);
3     for (int j = 0; j < m; j++) {
4         int u, v;
5         cin >> u >> v;
6         u --= 1;
7         v --= 1;
8         adj[v].push_back (u);
9     }
10
11    vis = vector <int> (n);
12    bool ok = true;
13    for (int v = 0; v < n; v++)
14        ok &= dfs (v);
15
16    if (ok) {
17        cout << "YES" << endl;
18        for (auto v : order)
19            cout << v + 1 << " ";
20        cout << endl;
21    }
22    else
23        cout << "NO" << endl;
```

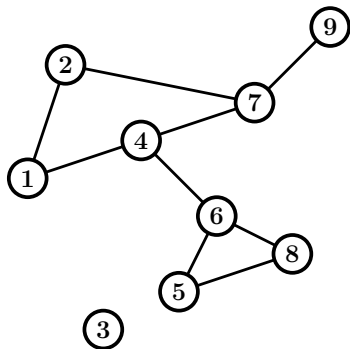
# Мосты

Дан неориентированный граф. Найдите все мосты в нём: рёбра, при удалении которых количество компонент связности увеличивается.

# Мосты

Дан неориентированный граф. Найдите все мосты в нём: рёбра, при удалении которых количество компонент связности увеличивается.

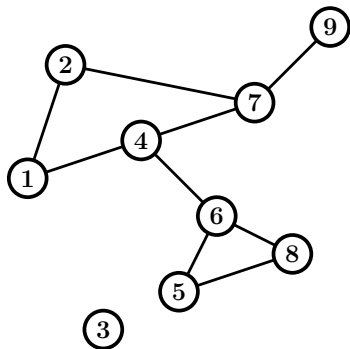
Пример:



# Мосты

Дан неориентированный граф. Найдите все мосты в нём: рёбра, при удалении которых количество компонент связности увеличивается.

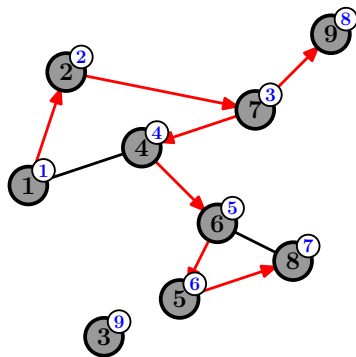
Пример:



Здесь мосты — рёбра 4–6 и 7–9.

# Мосты

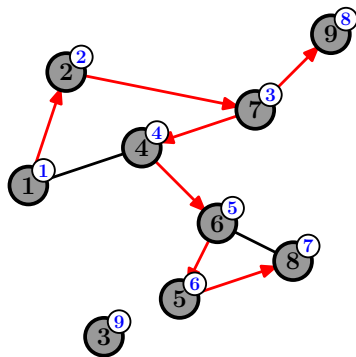
Идея решения:



Запустим поиск в глубину от всех ещё не посещённых вершин, запишем время входа в каждой вершине (синее число).

# Мосты

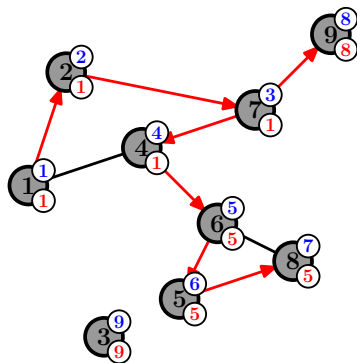
Идея решения:



Для каждой вершины рассмотрим её поддерево в поиске в глубину (красные стрелки). Все рёбра, не вошедшие в дерево — обратные рёбра (чёрные).

# Мосты

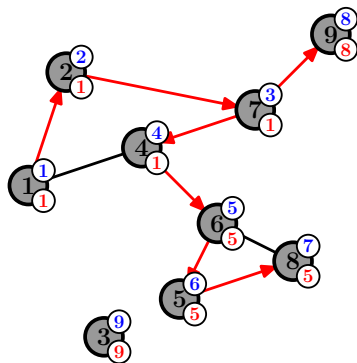
Идея решения:



Посмотрим, какие времена входа достижимы, если ходить по этому поддереву и в конце, может быть, пройти по обратному ребру. Запишем минимальное из них (красное число).

# Мосты

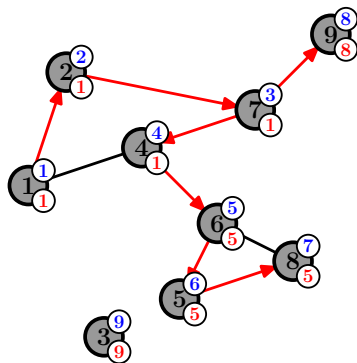
Идея решения:



Если в вершине синее число (время входа) равно красному (минимум достижимых), то ребро дерева, идущее в эту вершину, является мостом (если оно есть).

# Мосты

Идея решения:



Как быстро посчитать этот минимум? Это минимум из времени входа (синее число), времён входа в соседей (чёрное ребро, синее число) и ответов в поддеревьях (красная стрелка, красное число).

# Вопросы?

# Вопросы?